MULTIDISCIPLINARY SCIENTIFIC JOURNAL NÚCLEO DO CONHECIMENTO
REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR NÚCLEO DO CONHECIMENTO ISSN: 2448-0959
https://www.nucleodoconhecimento.com.br

CONJECTURA FORTE DE GOLDBACH (CFG)

ARTIGO ORIGINAL

COSTA, Bibiano Silva da[1]

COSTA, Bibiano Silva da. **Conjectura Forte de Goldbach (CFG)**. Revista Científica Multidisciplinar Núcleo do Conhecimento. Ano 09, Ed. 01, Vol. 01, pp. 71-83. Janeiro de 2024. ISSN: 2448-0959, Link de acesso: https://www.nucleodoconhecimento.com.br/matematica/conjectura-forte-de-goldbach, DOI: 10.3279/nucleodoconhecimento.com.br/matematica/conjectura-forte-de-goldbach

RESUMO

Este artigo é uma proposta de prova da conjectura forte de Goldbach, que diz: todo número par maior que 2 é a soma de dois números primos. Esta conjectura, pelo que se sabe até aqui, ainda é um problema em aberto, considerada uma questão difícil de resolver da matemática, desafia os estudiosos desde 1742. Nesta proposta de prova da (CFG), serão utilizados conhecimentos universais de conjuntos, sequências, intervalos, função e equação quadrática, progressões, aritmética e geométrica, logaritmo e derivada e provavelmente conceitos novos na matemática, necessários a CFG. A comprovação desta conjectura tem início com as demonstrações de equações que determinam pares de números ímpares primos e não primos e termina com uma estimativa de n pares de primos, cada par de soma -b. A linha de raciocínio utilizada para a comprovação desta questão está pautada em uma metodologia expositiva de nível leve, acessível a um grande número de estudantes, com abordagens indutivas, aritméticas e algébricas, sem cálculo avançado, mas com novidades e muito raciocínio lógico implícito e explícito de fácil compreensão.

Palavras chaves: Sequências, Intervalos, Equações, Demonstrações, Raiz quadrada.

1. INTRODUÇÃO

Em 1742 um professor e estudioso da matemática chamado Christian Goldbach, enviou ao célebre matemático Leonhard Euler, uma carta sobre um assunto que mais tarde ficou conhecido como conjectura de Goldbach. Euler a considerou verdadeira, mas não deu uma prova (Courant e Robbins, 2000). A conjectura de Goldbach é um dos problemas da matemática até hoje em debate, considerado um dos mais difíceis de ser provado, regidos pela teoria dos números inteiros. A maioria das proposições na teoria dos números ou na matemática como um todo, está relacionada a uma classe de objetos com alguma propriedade comum (Domingues e Iezzi, 2003). Um exemplo são os números primos, uma sequência irregular que parece não seguir nenhum padrão. Nessa abordagem segue uma linha de raciocínio muito provavelmente não convencional, diferente da linha tradicional. Opta-se aqui por uma metodologia que não exige cálculo avançado, sendo além de tudo, didaticamente simples, prática e acessível a todos os interessados em conhecê-la. Outro detalhe importante, é que serão usadas tabelas específicas, para mostrar detalhes que fazem a diferença no uso da função quadrática para a comprovação desta conjectura, levando em conta que, “Toda função polinomial é contínua” (Guidorizzi, 2001), essa condição é importante pois a função quadrática vinculada a PA tem uso imprescindível nessa proposta.

2. REFERENCIAL TEÓRICO

Existem dois grupos de estudiosos da matemática que opinam sobre a conjectura de Goldbach desde seu aparecimento, um grupo que parece ser a maioria, acha que ela é verdadeira, o outro diverge. Algumas verificações na conjectura foram feitas, uma das mais recentes utilizou o número $6x10^{16}$ (Verma, 2013), porém, sabemos que não é simplesmente este tipo de verificação que vai comprovar a veracidade dessa conjectura, são necessários muito mais que isso, como equações, demonstrações, teoremas etc.

A proposta é provar por meio equações, inequações, proposições e outros, que todo número par maior que 2 é a soma de dois números primos, tudo isso será mostrado com o auxílio das referências de Ávila, (2010); Courant e Robbins, (2000); Domingues e Iezzi, (2003); Guidorizzi, (2001); Lima, (1989); Paenza, (2009); Verma, (2013), mas com algo de novo na matemática utilizada.

De acordo com a definição de divisores triviais, e não triviais, primo é todo número inteiro maior que 1, divisível somente por 1 e por ele mesmo (Domingues, 2003), sendo 2, o único primo par.

De acordo com o teorema fundamental da aritmética, todo número composto pode ser decomposto em fatores primos. Segundo Euclides em seu livro 9 dos Elementos, existem infinitos números primos (Ávila, 2010). De acordo a aproximação de Gauss (1777-1885) para os primos, quanto maior for um número x, maior será o número de primos gerado por Ҧ(x)= x/ln x, é o teorema dos números primos (Domingues, 2003), dando o devido amparo a comprovação da (CFG) que aqui se fará.

3. EVIDÊNCIAS QUE NOS LEVAM A COMPROVAÇÃO DA CONJECTURA FORTE DE GOLDBACH

A conjectura forte de Christian Goldbach (1690 – 1764) com a participação de Leonard Euler (1707- 1783) diz que: todo número par maior que 2 é a soma de dois números primos (Courant, 2000).

Definição: Seja –b um inteiro par maior que dois, existindo x_1 e x_2 primos, de modo que, $–b = x_1 + x_2$. Dizemos então que, x_1 e x_2, que representam um par de primos.

Exemplos: 2 + 2 = 4, 5 + 17 = 22, 11 + 1013 = 1024 etc.

3.1 PROPRIEDADE DA PARIDADE UMA EVIDÊNCIA DE VERACIDADE DA CONJECTURA DE GOLDBACH

- A soma de dois números ímpares é sempre um número par. Os primos são números ímpares.

Para comprovar esta conjectura faremos uso de –b, um número par elemento do conjunto { 6, 8, 10, 12,...} e o 4 que é um caso particular por ser o único vindo de dois primos pares. Os demais virão da soma de dois ímpares onde estão os primos, do conjunto I' = { 1, 3, 5, 7, 9, 11, ... , -b-3, -b-1 }, considerando que eles estão entre zero e –b com –b/2(média) ao centro.

{ 0, 1, 3, 5, 7, 9, ... , -b/2, ... , -b-9, -b-7, -b-5, -b-3, -b-1, -b },

de onde obtemos, (-b-1) + 1 = -b, (-b-3) + 3 = -b, (-b-5) + 5 = -b, ..., $x_1 + x_2 = -b$.

3.2 FUNÇÃO QUADRÁTICA GERADORA DE PA

A PA é gerada a partir de –b/2 de $f(x) = x^2 - (-b)x + (-b/2)^2$, com n equações e n pares (x_1, x_2) de ímpares primos e não primos, como soluções.

Como sabemos a equação polinomial com duas soluções (x_1, x_2), é a quadrática(2ºgrau) (Guidorizzi, 2001). De zero a –b>4, existem –b/2 + 1 números pares(excluídos) e –b/2 números ímpares. Para o cálculo dos n pares (x_1, x_2) de ímpares primos e não primos, utilizaremos –b/2 números ímpares para gerar n funções quadráticas e em consequência n equações quadráticas, vejamos:

$f(x) = x^2 - (-b)x + (-b/2)^2 = a_1^2, a_2^2, a_3^2, \ldots, a_n^2$, sendo $a_1^2 \leq f(x) \leq a_n^2$ e $a_n = -b/2 - 1$,

onde, $a_n \in \{0,2,4,6,\ldots, -b/2 - 1\}$ ou $a_n \in \{1,3,5,7,\ldots, -b/2 - 1\}$,

sendo a_n o termo geral da PA ($a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$), de razão 2, onde tem-se $f(x)=a_n^2$, com -b/2 números ímpares e –b/4 pares de ímpares, sendo n = -b/4, se –b é múltiplo de 4, e –b/4 +1/2, se –b não é múltiplo de 4. Esses valores e n são determinantes para essa comprovação.

Demonstração de f(x) vinculada a uma progressão aritmética.

Sejam n pares de ímpares (x_1, x_2), soluções de n equações $x^2 - (-b)x + (-b/2)^2 = a_1^2$, a_2^2, a_3^2,..., a_n^2 , sendo cada par de ímpares formado por números equidistantes de –b/2, em I' onde,

I'={ 1,3,5,7, ... , -b/2, ... , -b-7, -b-5, -b-3, -b-1 }, com soma –b, exceto –b/2 sendo par.

Sejam S e P conforme as relações de Girard, sendo a = 1.

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -b & (1)\ \text{(propriedade da paridade)} \\ P = x_1 \bullet x_2 = c & (2) \end{cases}$$

Do sistema acima temos, $x^2 - (-b)x + c = 0$ (3)

Existe também pela pro priedade da paridade,

$x_1 – x_2 = 2a_n = \sqrt{\Delta}$ (4), com $x_1 \geq x_2$. Fazendo: $(x_1 + x_2)^2 = (-b)^2$, obtém-se:

$x_1^2 + x_2^2 = (-b)^2 – 2x_1x_2$ (5)

Da mesma forma temos,

$(x_1 – x_2)^2 = (2a_n)^2$, obtendo $x_1^2 + x_2^2 = 4a_n^2 + 2x_1x_2$ (6)

Substituindo (6) em (5), vem,

$4a_n^2 + 2x_1x_2 = (-b)^2 – 2x_1x_2$, de onde decorre,

$x_1x_2 = (-b/2)^2 - a_n^2 = c$ (7)

Substituindo (7) em (3) e fazendo $f(x) = a_n^2$, temos finalmente uma equação do grupo de n funções f(x),

$f(x) = x^2 – (-b)x + (-b/2)^2 = a_n^2$ ou fatorando o trinômio temos um TQP na função, sendo, $f(x) = [x-(-b/2)]^2= a_n^2$. (8)

De onde vem n pares de soluções, com pelo menos uma de primos,

$x = -b/2 \pm a_1$, $x = -b/2 \pm a_2$, $x = -b/2 \pm a_3$, até $x = -b/2 \pm a_n$

Como podemos notar de (8), temos uma função gerando uma PA de n termos, que vai de a_1 a a_n, onde se tem, $f(x) = a_1^2, a_2^2, a_3^2, ... , a_n^2$. Onde, para uma PA de 4 termos por exemplo, temos:

$a_4 = -b/2 - 1$, $a_3 = -b/2 - 3$, $a_2 = -b/2 - 5$, $a_1=-b/2 – 7$, com $–b/2 = 7$

- de um modo geral, se -b/2 é ímpar, os n termos da PA são números pares, sendo $a_1 = 0$,

Ou, $a_4 = -b/2 - 1$, $a_3 = -b/2 – 3$, $a_2 = -b/2 – 5$, $a_1 = -b/2 – 7$, com $-b/2 = 8$

- se $–b/2$ é par, os n termos da PA são números ímpares, sendo $a_1 = 1$.

Cada solução tem x_1 e x_2 equidistantes de $–b/2$, inclusive ele próprio sendo ímpar, é neste contexto que pelo menos um par de primos (x_1, x_2) existe, sendo $x_1 + x_2 = -b$.

Como existem n equações com 2 soluções cada uma, para simplificar e dá praticidade às resoluções, iremos utilizar uma tabela específica, denominada Tabela B1(TB1).

3.3 CONDIÇÕES PARA A EXISTÊNCIA DE X ENVOLVENDO A PA

- Se $–b/2$ é ímpar, logo $–b/2 -1 = a_n$ é par, sendo $–b/2 – 1$ último termo da PA(0, 2, 4,..,b/2 -1).
- Se $–b/2$ é par, a_n é ímpar, sendo a PA(1, 3, 5,...,-b/2 -1).

3.4 TABELA B1

A TB1 é uma ferramenta que foi criada especificamente para determinar de forma organizada e muita praticidade, valores numéricos e raízes, onde serão mostrados todos os primos e pares de primos existentes entre zero e -b, além de a_n^2=f(x) e f'(x) = $2a_n = x_1$-x_2 etc.

A TB1 será utilizada para a resolução de n equações, representadas por

f(x), sendo $f(x) = x^2 – (-b)x + (-b/2)^2 = a_1^2, a_2^2, a_3^2, ..., a_n^2$, $a_n = -b/2 – 1$.

O número de termos n da PA, equivale ao número de pares de ímpares formados entre zero e -b pois, -b/2 somado e subtraído a cada termo da PA, determina n pares (x_1, x_2) de ímpares primos e não primos, sendo $–b > 4$, $\forall x \in \{ 1, 3, 5, 7, 9, ..., -b-1\}$.

Montagem da tabela B1.

Tabela 1: Tabela B1 – TB1. Valores dos pares (x_1, x_2), dos quadrados e do dobro dos termos de uma PA gerada por f(x), sendo -b > 4 um número inteiro par

x_1	-b/2	-b/2+2	-b/2+4	...	...	- b-3	- b-1	-b
x_2	-b/2	-b/2 -2	-b/2 -4	...	...	3	1	0
$f(x)=a_n^2$	a_1^2	a_2^2	a_3^2	...	...	$(-b/2-3)^2$	$(-b/2-1)^2$	-
$f'(x)=2a_n$	$2a_1$	$2a_2$	$2a_3$	...	...	- b-6	-b-2	-

|-----------------------------n termos-------------------------------------|

Fonte: Autor (2023).

Nas duas primeiras linhas, existe pelo menos 1 par de primos (x_1, x_2), sendo $x_1 + x_2 = -b$.

Exemplo: Quais pares de primos tem soma igual a 18?

Resolução com uso da TB1, sendo –b = 18, -b/2 = 9 números ímpares,

onde $a_n = 9 - 1 = 8$ é o último termo da PA(0, 2, 4, 6, 8) vinculada a f(x),

sendo n = 5 pares de ímpares, primos e não primos, e 5 equações, onde temos,

$f(x) = x^2 - 18x + 9^2 = 0^2, 2^2, 4^2, 6^2, 8^2$ na tabela B1 a seguir:

Tabela 1: TB1 - exemplo, sendo –b = 18 com $f(x) = x^2 - 18x + 9^2$, gerando pares (x_1, x_2) de números ímpares primos e não primos, e termos a_n^2 e $2a_n$ de uma PA vinculada a f(x)

x_1	9	11	13	15	17	18
x_2	9	7	5	3	1	0
$f(x)=a_n^2$	0	2^2	4^2	6^2	8^2	-
$f'(x)=2a_n$	0	4	8	12	16	-

Fonte: Autor (2023).

Onde temos 2 pares de primos: (7, 11) e (5, 13), cuja soma é -b = 18.

Observação:

Se -b/2 é um número par, primeiro soma 1 a –b/2, na primeira linha, e subtrai 1 na segunda linha para que os pares de números em toda a tabela sejam de números ímpares, procedendo de forma análoga à tabela acima para –b/2 ímpar.

4. COMPROVAÇÃO DA CONJECTURA FORTE DE GOLDBACH

4.1 TEOREMA DO MENOR VALOR (V_M) E DO MAIOR VALOR (V_M) DE PARES DE PRIMOS

Para provar como verdadeira a (CFG), serão utilizados dois teoremas criados para o cálculo de x_1 e x_2, um par de primos de soma –b > 4 par, excluindo temporariamente o primo par, considerando:

- 1, o menor número de pares de primos e também de não primos ímpares, de soma –b, fato que ocorre para -b = 6 e -b = 8. Sendo p_2 o número de pares de primos e Ep_2 estimativa de pares de primos.
- -b/4 ou -b/4 +1/2= n ≥ 2, um número qualquer de pares de ímpares, primos e não primos.
- -b/2 números ímpares primos e não primos.
- $V_m \leq Ep_2 \leq V_{M,}$ intervalo de ocorrência de p_2, estimativas.

4.1.1 TEOREMA DO MENOR VALOR (V_M) DE PARES DE PRIMOS

1 e –b/4 são tais que, existe entre eles V_m tal que, $V_m = \sqrt{-b/4}$ (raiz positiva)

Demonstração:

1, Vm, -b/4, nessa ordem são tais que, $V_m \div 1 = -b/4 \div V_m$, sendo V_m a média geométrica de 1 e –b/4, então:

$V_m = \sqrt{-b/4}$, menor estimativa de p_2 no intervalo considerado.

4.1.2 TEOREMA DO MAIOR VALOR (V_M) DE PARES DE PRIMOS

Os termos 1 e –b/2 são tais que, existe entre eles V_M, tal que $V_M = \sqrt{-b/2}$.

Demonstração:

Os termos 1, V_M, –b/2, nessa ordem são tais que $V_M \div 1 = -b/2 \div V_M$, sendo V_M a média geométrica de 1 e –b/2, então:

$V_M = \sqrt{-b/2}$, maior estimativa de p_2 no intervalo considerado.

Portanto temos o intervalo de ocorrência de p_2 pares de primos, estimativas:

$V_m \leq Ep_2 \leq V_M$, ou seja, $\sqrt{n} = \sqrt{-b/4} \leq Ep_2 \leq \sqrt{-b/2} = \sqrt{2n}$.

Os exemplos estão na Tabela B2 e de forma mais explícita abaixo dela.

A confirmação de Ep_2 está na tabela B2 com alguns valores de –b, p_2(pares de primos), n(pares de ímpares) além $\sqrt{-b/4}$, $\sqrt{-b/2}$ e $\sqrt{2n}$ implícitos. Observando as relações existentes entre eles, sabendo que n = -b/4 ou –b/4 + ½, fica claro a veracidade de Ep_2.

Tabela 2: Tabela B2 – TB2. Valores de –b > 4, p_2(pares de primos), n e suas relações, visando o número de pares de primos de soma –b

-b	**6**	**8**	**10**	**12**	**14**	**16**	**18**	**20**	**50**
p_2	1	1	2	1	2	2	2	2	4
n	2	2	3	3	4	4	5	5	13

...	**100**	**...**	**200**	**...**	**500**	**...**	**512**	**...**	**1024**
...	6	...	8	...	13	...	11	...	21
...	25	...	50	...	125	...	128	...	256

Fonte: Autor (2023).

Como podemos notar na TB2, existe uma relação entre –b e n, onde –b = 4n, ou –b = 4n - 2 e também entre p_2 e n, e –b/2 e n, as mais importantes, um padrão, que equivalem às duas médias geométricas determinadas, dando origem a duas PG de três termos como prova.

De acordo com a tabela B2 a cima, podemos notar a existência de um padrão em que, p_2 é igual ou próximo de $\sqrt{n}$ e também de $\sqrt{2n}$, tal que, $\sqrt{n} \leq Ep_2 \leq \sqrt{2n}$, sendo n = -b/4 ou -b/4 + 1/2 e 2n = –b/2, sendo p_2 o número de pares de primos e Ep_2 uma estimativa de pares de primos, onde cada par tem soma igual a –b. Exemplo, para:

1) -b = 16, temos, $p_2 = 2$ e n = 4, logo, $\sqrt{4} \leq Ep_2 \leq \sqrt{8}$, ou seja, $2 \leq Ep_2 \leq 3$.

2) -b = 200, temos, $p_2 = 8$ e n =50, logo, $\sqrt{50} \leq Ep_2 \leq \sqrt{100}$ ou seja, $7 \leq Ep_2 \leq 10$.

3) -b = 512, temos, $p_2 = 11$ e n = 128, logo, $\sqrt{128} \leq Ep_2 \leq \sqrt{256}$, ou seja, $11 \leq Ep_2 \leq 16$.

4) -b = 1024, temos, $p_2 = 21$ e e n = 256, logo, $\sqrt{256} \leq Ep_2 \leq \sqrt{512}$, ou seja, $16 \leq Ep_2 \leq 22$.

Uma outra forma de provar a CFG é associando Ep_2 a Л(x) = Л(-b) = -b / ln (-b), (Estimativa de primos), de Gauss (Courant e Robbins, 2000), gerando Ep_2 = Л(-b) / ln(-b) (Estimativa de pares de primos).

Utilizando o último exemplo,

5) -b = 1024, temos: Ep_2 = Л(1024) / ln 1024 = 148 / 7 = 21 pares de primos (estimativa).

Como podemos notar, todos os valores de Ep_2, alguns rigorosamente iguais ao valor real de p_2, são confirmados no geral, pela Tabela B2.

Vale ressaltar que:

- $p_1 + p_2 = n$, é o número de pares de ímpares, primos p_2 e não primos p_1, formados por (1, composto e primo), sendo $p_1 \geq p_2$, exceto para –b = 10.

4.1.3 CONSEQUÊNCIA DE EP_2

Uma consequência de Ep_2 é Ep(estimativa de primos p), e sua relação com a aproximação de Gauss (Courant e Robbins, 2000) que chegou muito próximo da prova da (CFG), obtendo:

Л(x)~x ÷ lnx, que é uma estimativa de primos p≥2 (lnx é o logaritmo natural de x).

Fazendo x = -b>4 e dividindo os dois membros da equação por ln(-b) obtemos uma estimativa de pares de primos Ep_2, confirmada também pela TB2, onde temos:

Ep_2 = Л(-b)/ln(-b) = $-b/[\ln(-b)]^2$ que é uma outra forma de provar a CFG. Dessas relações decorre a estimativa de primos Ep a seguir:

√-b/4 ln(-b) ≤ Ep ≤ √-b/2 ln(-b).

Exemplo:

-b = 36, sendo –b/4 = 9 e –b/2 = 18, onde, √9 = 3, √18 = 4,25 e ln 36 = 3,58, então, temos:

3 x 3,6 ≤ Ep ≤ 4, x 3,6 logo, 11 ≤ Ep ≤ 14. Entre zero e 36 existem 11 primos, incluindo o 2.

A relação de Ep_2 com o Л(x) é uma prova de que Ep_2 e Ep estão corretos.

Portanto, de acordo com 4.1.1, 4.1.2, 4.1.3 e TB2, fica provado que:

Todo número par maior que 2 é de fato a soma de dois números primos, determinando como verdadeira a conjectura forte de Goldbach.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os números primos há muito tempo despertam uma curiosidade muito singular nos estudiosos. Erastótenes se notabilizou por criar um crivo para encontrar os primeiros números primos, enquanto Euclides demonstrou a infinidade dos primos (Ávila, 2010).

Trata-se de uma sequência de números muito irregular, que parece não seguir nenhum padrão. Há quem descreva os números primos como os “átomos da matemática”, pela sua indivisibilidade e principalmente pela sua importância na formação dos números compostos e seu uso na criação de códigos como a criptografia. Muitos estudiosos, como Euler, Gauss, Fermat e outros (Courant e Robbins, 2000), se debruçaram sobre os primos no intuito de conhecê-los melhor. Muitos questionamentos surgiram, entre eles está a famosa conjectura forte de Goldbach que é objeto de prova deste artigo. Quero ressaltar principalmente a importância crucial de Ep_2 e das equações da soma de dois ímpares, sendo, $x_1 + x_2 = -b$ e $x_1 - x_2 = 2a_n$, esta talvez inédita, dando origem ao uso da PA, da PG e no final a estimativa de Gauss para os primos, reforçando Ep_2 e Ep, importantes, na determinação de pares de primos, o carro chefe dessa comprovação. Como pudemos ver, por meio de uma metodologia fácil de entender, uma matemática surpreendentemente leve, chegou-se ao resultado almejado, fechando com a comprovação da conjectura forte de Goldbach, como verdadeira.

REFERÊNCIAS

ÁVILA, Geraldo. **Várias Faces da matemática**. Editora Blucher, São Paulo, 2010.

COURANT, Richard; ROBBINS, Herbert. **O que é matemática?** Editora Ciência Moderna, Rio de Janeiro, 2000.

DOMINGUES, Higino H.; IEZZI, Gelson. **Álgebra Moderna**. Editora Atual, São Paulo, 2003.

GUIDORIZZI, Hamilton L. **Um curso de Cálculo, vol. 1**. LTC Editora, Rio de Janeiro, 2001.

LIMA, Elon Lages. **Curso de Análise vol. 1**. LTC Editora, Rio de Janeiro 1989.

PAENZA, Adrian. **Matemática cadê você?** Editora Civilização, Rio de Janeiro, 2009.

VERMA, Surendra. **Ideias Geniais de Matemática.** Editora Gutemberg, São Paulo, 2013.

Enviado: 4 de dezembro de 2023.

Aprovado: 29 de dezembro de 2023.

[1] Pós-graduado (*lato sensu*) em Metodologia de Ensino de Matemática, Graduado em Eletrônica – Licenciatura Plena – UFCE. ORCID: 0009-0005-0490-0043.