MULTIDISCIPLINARY SCIENTIFIC JOURNAL NÚCLEO DO CONHECIMENTO

REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR NÚCLEO DO CONHECIMENTO ISSN: 2448-0959

https://www.nucleodoconhecimento.com.br

SOBRE A FINITUDE DOS NÚMEROS PRIMOS GÊMEOS COM BASE NO TEOREMA DOS NÚMEROS PRIMOS

ARTIGO ORIGINAL

ARANTES, Gabriel Costa Vieira[1]

ARANTES, Gabriel Costa Vieira. **Sobre a finitude dos números primos gêmeos com base no teorema dos números primos.** Revista Científica Multidisciplinar Núcleo do Conhecimento. Ano. 07, Ed. 11, Vol. 13, pp. 189-196. Novembro de 2022. ISSN: 2448-0959, Link de acesso: https://www.nucleodoconhecimento.com.br/matematica/numeros-primos, DOI: 10.32749/nucleodoconhecimento.com.br/matematica/numeros-primos

RESUMO

Os números primos distantes duas unidades um do outro são chamados de gêmeos. O conjunto dos números primos é comumente simbolizado por $\mathbb{P}$. A Conjectura dos Números Primos Gêmeos afirma que existem infinitos pares de números primos p, q $\in \mathbb{P}$ que são gêmeos. Na Matemática, conjecturas são hipóteses comumente aceitas, mas que ainda não foram rigorosamente demonstradas (ou contrariadas). Neste artigo, objetiva-se demonstrar que a Conjectura dos Primos Gêmeos é falsa. Isto será feito através do raciocínio por redução ao absurdo. Esta demonstração será baseada no famoso Teorema dos Números Primos.

Palavras-chave: Conjectura, Primos gêmeos, Teorema dos números primos, Finitude.

INTRODUÇÃO

Considere que $\mathbb{P}$ é o conjunto dos números primos. Dados dois números primos p, q $\in \mathbb{P}$ tais que q > p, eles serão chamados de gêmeos quando a distância entre ambos for de exatamente duas unidades (RIBENBOIM, 2020). Em notação algébrica, tem-se q = p + 2. A Conjectura dos Primos Gêmeos afirma que existem infinitos pares de números primos p, q $\in \mathbb{P}$ que cumprem a propriedade apresentada no parágrafo anterior. Na Matemática, uma conjectura é uma hipótese ainda não demonstrada, ou seja, é factível de ser contrariada, por mais que pareça ser verdadeira. Neste artigo, será demonstrado que a Conjectura dos Números Primos Gêmeos é falsa, e, portanto, o conjunto destes números deve ser **FINITO**. Para realizar tal demonstração, nos basearemos no famoso Teorema dos Números Primos, decorrente dos estudos iniciais de Carl Friedrich Gauss sobre a função $\pi: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ de contagem dos números primos. Este teorema afirma que a imagem desta função, denotada por $\pi(x)$, tende para x/ln(x) à medida em que a variável independente x $\in \mathbb{N}$ tende ao infinito (SANTOS, 2020).

DESENVOLVIMENTO

Eis a definição da função de contagem dos números primos, até um certo número x $\in \mathbb{N}$:

$$\pi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

$$\mathbb{P} = \{n \in \mathbb{N} \mid \text{os únicos divisores de n são 1 e n}\}$$

$$A = \{p \in \mathbb{P} \mid p \leq x, \text{dado } x \in \mathbb{N}\}$$

$$\mathrm{Im}(\pi) = \{\pi(x) \in \mathbb{N} \mid \pi(x) = n(A)\}$$

Quando $x \longrightarrow \infty$, temos a aproximação de Gauss para a função $\pi(x)$ dada por:

RC: 133539
Disponível em: https://www.nucleodoconhecimento.com.br/matematica/numeros-primos

$$\lim_{x \to \infty} \pi(x) = \frac{x}{\ln(x)}$$

Esta aproximação consiste no famoso Teorema dos Números Primos, devidamente provado pelos matemáticos Atle Selberg e Paul Erdos em 1949.

Dados dois números primos p, q $\in \mathbb{P}$, eles serão chamados de primos gêmeos quando ocorrer:

$$q = p + 2 \ (q > p)$$

Note também que, sempre que dois números primos p, q $\in \mathbb{P}$ são gêmeos, temse o seguinte:

$$\pi(q) - \pi(p) = 1$$

Pois se p, q $\in \mathbb{P}$ são gêmeos, então certamente eles são números primos consecutivos em $\mathbb{P}$.

Teorema: O conjunto dos números primos gêmeos é finito, isto é, limitado.

Vamos supor, por hipótese de absurdo, que existam infinitos pares de números primos p, q $\in \mathbb{P}$ que sejam gêmeos, tais que q = p + 2. Então, fazendo $p \to \infty \text{ e } q \to \infty$, teríamos o seguinte:

$$\lim_{p\to\infty} \pi(p) = \frac{p}{\ln(p)}$$

$$\lim_{q\to\infty} \pi(q) = \lim_{p\to\infty} \pi(p+2) = \frac{p+2}{\ln(p+2)}$$

$$\boldsymbol{\pi(q) - \pi(p) = 1}$$

$$\lim_{p\to\infty} [\pi(q) - \pi(p)] = \lim_{p\to\infty} (1) = 1$$

$$\lim_{p\to\infty} [\pi(q) - \pi(p)] = 1$$

$$\lim_{p\to\infty} \pi(q) - \lim_{p\to\infty} \pi(p) = 1$$

$$\lim_{p\to\infty} \pi(p+2) - \lim_{p\to\infty} \pi(p) = 1$$

$$\boldsymbol{\frac{p+2}{\ln(p+2)} - \frac{p}{\ln(p)} = 1}$$

A partir daí, seguindo o raciocínio de absurdo, poderíamos afirmar que:

$$\lim_{p\to\infty}\left[\frac{p+2}{\ln(p+2)}-\frac{p}{\ln(p)}\right]=\lim_{p\to\infty}(1)=1$$

E aqui jaz a nossa contradição, pois na verdade se tem:

$$\lim_{p\to\infty}\left[\frac{p+2}{\ln(p+2)}-\frac{p}{\ln(p)}\right]=0$$

Vamos provar este resultado logo abaixo:

$$\lim_{p\to\infty}\left[\frac{p+2}{\ln(p+2)}-\frac{p}{\ln(p)}\right]=\lim_{p\to\infty}\left[\frac{2\cdot\ln(p)+p\cdot\ln(p)-p\cdot\ln(p+2)}{\ln(p)\cdot\ln(p+2)}\right]=$$

$$=\lim_{p\to\infty}\left[\frac{2}{\ln(p+2)}+\frac{p}{\ln(p+2)}-\frac{p}{\ln(p)}\right]=\lim_{p\to\infty}\left[\frac{2}{\ln(p+2)}\right]+\lim_{p\to\infty}\left[\frac{p}{\ln(p+2)}-\frac{p}{\ln(p)}\right]=$$

$$=0+\lim_{p\to\infty}\left[\frac{p}{\ln(p+2)}-\frac{p}{\ln(p)}\right]=\lim_{p\to\infty}\left[\frac{p}{\ln(p+2)}-\frac{p}{\ln(p)}\right]=$$

$$=\lim_{p\to\infty}\left[\frac{p\cdot\ln(p)-p\cdot\ln(p+2)}{\ln(p)\cdot\ln(p+2)}\right]=\lim_{p\to\infty}\left[\frac{p\cdot(\ln(p)-\ln(p+2))}{\ln(p)\cdot\ln(p+2)}\right]=$$

$$=\frac{\lim\limits_{p\to\infty}p\cdot(\ln(p)-\ln(p+2))}{\lim\limits_{p\to\infty}\ln(p)\cdot\ln(p+2)}=\frac{\lim\limits_{p\to\infty}\frac{\ln(p)-\ln(p+2)}{1/p}}{\lim\limits_{p\to\infty}\ln(p)\cdot\ln(p+2)}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{p\to\infty}\frac{\ln(p/(p+2))}{1/p}}{\lim\limits_{p\to\infty}\ln(p)\cdot\ln(p+2)}=\frac{\lim\limits_{p\to\infty}\frac{\ln(1/(1+2/p))}{1/p}}{\lim\limits_{p\to\infty}\ln(p)\cdot\ln(p+2)}$$

Portanto, até este momento, podemos concluir que:

$$\lim_{p\to\infty}\left[\frac{p+2}{\ln(p+2)}-\frac{p}{\ln(p)}\right]=\frac{\lim\limits_{p\to\infty}\dfrac{\ln(1/(1+2/p))}{1/p}}{\lim\limits_{p\to\infty}\ln(p)\cdot\ln(p+2)}$$

Vamos fazer uma pausa para determinar o resultado do limite que consta no numerador:

$$\lim_{p\to\infty}\frac{\ln(1/(1+2/p))}{1/p}=\frac{\ln(1/(1+2/\infty))}{1/\infty}=\frac{\ln(1)}{1/\infty}=\frac{0}{0}$$

Como verificamos que a indeterminação é do tipo **0/0**, podemos utilizar a Regra de L'Hôpital:

$$\lim_{p\to\infty}\frac{\ln(1/(1+2/p))}{1/p}=\lim_{p\to\infty}\frac{\frac{d}{dp}\ln(1/(1+2/p))}{\frac{d}{dp}(1/p)}=\lim_{p\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{p^2+2p}\right)}{\left(-\frac{1}{p^2}\right)}=$$

$$=\lim_{p\to\infty}\left(\frac{2}{p^2+2p}\right)\cdot(-p^2)=-\lim_{p\to\infty}\left(\frac{2p^2}{p^2+2p}\right)=-\lim_{p\to\infty}\left(\frac{2}{1+2/p}\right)=-2$$

Deste modo, obtivemos o seguinte resultado:

$$\lim_{p\to\infty}\frac{\ln(1/(1+2/p))}{1/p}=-2$$

Isto posto, podemos prosseguir com o nosso desenvolvimento anterior:

RC: 133539
Disponível em: https://www.nucleodoconhecimento.com.br/matematica/numeros-primos

$$\lim_{p\to\infty}\left[\frac{p+2}{\ln(p+2)}-\frac{p}{\ln(p)}\right]=\frac{\lim\limits_{p\to\infty}\dfrac{\ln(1/(1+2/p))}{1/p}}{\lim\limits_{p\to\infty}\ln(p)\cdot\ln(p+2)}=\frac{-2}{\lim\limits_{p\to\infty}\ln(p)\cdot\ln(p+2)}=$$

$$=\frac{-2}{\lim\limits_{p\to\infty}\ln(p)\cdot\lim\limits_{p\to\infty}\ln(p+2)}=\frac{-2}{\ln(\infty)\cdot\ln(\infty+2)}=\frac{-2}{\infty}=0$$

Com isto, concluímos finalmente que se tem:

$$\lim_{p\to\infty}\left[\frac{p+2}{\ln(p+2)}-\frac{p}{\ln(p)}\right]=0$$

Mas a nossa suposição inicial de que existem infinitos números primos p, q $\in \mathbb{P}$ que sejam gêmeos, tais que q = p + 2, nos conduziu ao seguinte absurdo:

$$\lim_{p\to\infty}\left[\frac{p+2}{\ln(p+2)}-\frac{p}{\ln(p)}\right]=1$$

Logo, nossa suposição inicial é falsa, o que significa que NÃO EXISTEM infinitos números primos p, q $\in \mathbb{P}$ que sejam gêmeos. Logo, o conjunto dos primos gêmeos é FINITO. Mais um resultado que corrobora com este fato é o seguinte:

não existe nenhum número primo p $\in \mathbb{P}$ que satisfaz a equação que havíamos obtido, também através da hipótese de absurdo:

$$\frac{p+2}{\ln(p+2)} - \frac{p}{\ln(p)} = 1$$

De fato, esta equação admite somente um par de soluções complexas, quando p $\in \mathbb{C}$. Veja:

$$p \cong 0{,}521768 + 2{,}09495.\mathrm{i}$$
$$\bar{p} \cong 0{,}521768 - 2{,}09495.\mathrm{i}$$

Isto também configura uma contradição, pois a suposição de que p $\in \mathbb{P}$ é um dos pilares fundamentais da nossa demonstração. O par de soluções complexas exibidas acima não pode ser obtido analiticamente, apenas numericamente, por isso a aproximação. Também devido a este fato, utilizou-se o site de inteligência artificial WolframAlpha para obter tais soluções.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Existem alguns artigos científicos com possíveis demonstrações da validade da Conjectura dos Primos Gêmeos, que se baseiam em outros teoremas ou conjecturas. Um grande exemplo é o artigo do pesquisador Adecio da Silva Santos, onde ele demonstra a validade da Conjectura dos Primos Gêmeos com base na Conjectura de Andrica (SANTOS, 2019). O presente artigo científico é provavelmente o primeiro que consiste em uma possível demonstração da nãovalidade da Conjectura dos Números Primos Gêmeos, contrariando o seu enunciado. A convicção do autor neste resultado se fundamenta no pilar do famoso Teorema dos Números Primos, baseado nos estudos iniciais de Gauss sobre a função de contagem dos números primos $\pi\colon \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ e devidamente demonstrado por Selberg e Erdos em 1949, a partir do qual foi construído todo o raciocínio de redução ao absurdo que conduziu à contradição da Conjectura dos Primos Gêmeos. Assim como toda demonstração, esta somente será validada e reconhecida pelas organizações internacionais da Matemática após uma rigorosa análise, que deve ser conduzida por uma equipe credenciada de matemáticos. Até que este momento ocorra, a demonstração apresentada neste artigo permanece como possível candidata à solução da Conjectura dos Números Primos Gêmeos.

REFERÊNCIAS

RIBENBOIM, Paulo. **Números Primos: velhos mistérios, novos recordes**. 3ª Edição. Coleção Matemática Universitária. 317 páginas. IMPA. Rio de Janeiro. 2020.

SANTOS, Adecio da Silva. **Demonstração da Conjectura de Andrica para todos os primos gêmeos**. Revista Científica Multidisciplinar Núcleo do Conhecimento. Ano 04, Ed. 04, Vol. 06, PP. 18-24. Abril de 2019. ISSN: 2448-0959. Disponível em: DOI: 10.32749/nucleodoconhecimento.com.br/matematica/primos-gemeos. Acesso em: 20 jun. 2022.

SANTOS, José Plínio de Oliveira. **Introdução à Teoria dos Números**. 3ª Edição. Coleção Matemática Universitária. 128 páginas. IMPA. Rio de Janeiro. 2020.

Enviado: Julho, 2022.

Aprovado: Novembro, 2022.

[1] Especialista Lato Sensu (Pós-Graduação) em Ensino de Estatística pela UFN, Licenciado em Física pela PUC Goiás, Licenciado em Química pela PUC Goiás. ORCID: 0000-0001-6298-1906.