



ANÁLISE E DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DA ASSIMETRIA MATRICIAL E DO TEOREMA DA ASSIMETRIA SELETIVA, DOIS RESULTADOS INÉDITOS SOBRE O ESPAÇO VETORIAL DAS MATRIZES

ARTIGO ORIGINAL

ARANTES, Gabriel Costa Vieira¹, LELIS, Bárbara Costa², POTIGUARA, Camila Gonçalves³, ARANTES, João Marcos Silva⁴, SOUZA, Lethícia Pires de⁵, OLIVEIRA JUNIOR, Vilmar de⁶, LOPES, Yasmin Moreira⁷

ARANTES, Gabriel Costa Vieira. Et al. **Análise e demonstração do teorema da assimetria matricial e do teorema da assimetria seletiva, dois resultados inéditos sobre o espaço vetorial das matrizes.** Revista Científica Multidisciplinar Núcleo do Conhecimento. Ano. 07, Ed. 08, Vol. 03, pp. 58-77. Agosto de 2022. ISSN: 2448-0959, [Link](https://www.nucleodoconhecimento.com.br/matematica/teorema) de acesso: <https://www.nucleodoconhecimento.com.br/matematica/teorema>, DOI: 10.32749/nucleodoconhecimento.com.br/matematica/teorema

RESUMO

O presente estudo relata dois teoremas inéditos sobre o espaço vetorial das matrizes, descobertos a partir da seguinte situação problema: duas matrizes retangulares A e B, onde o número de colunas da matriz A é igual ao número de linhas da matriz B, solicita-se a obtenção do produto matricial $A \times B$ e, posteriormente, o cálculo do determinante deste produto, denotado por $\det(A \times B)$, sempre que isto for possível. Por conseguinte, notou-se que o resultado do determinante do produto matricial $A \times B$, denotado por $\det(A \times B)$, era invariavelmente nulo, em algumas condições. Levantou-se, então, a hipótese de que tal padrão poderia se manter para matrizes com ordens maiores, o que resultou no Teorema da Assimetria Matricial e no Teorema da Assimetria Seletiva. Desta forma, tem-se como objetivo analisar e demonstrar esses dois teoremas inéditos da Matemática sobre o espaço vetorial das matrizes, investigando os seus corolários e suas aplicações. Para isso, adotou-se o método dedutivo, através do levantamento de hipóteses, com a finalidade de demonstrar os teoremas desenvolvidos. Como resultados, apresenta-se o Teorema 1, denominado Teorema da Assimetria Matricial, onde, dadas duas matrizes retangulares $A(m \times n)$ e $B(n \times m)$ de ordens opostas, com $m > n$, tem-se $\det(A \times B) = 0$, independentemente de quais elementos estão dispostos nestas matrizes. A partir do Teorema 1, foram



desvendados onze corolários de fundamental importância, reforçando a amplitude e a generalidade da sua proposição. Já o Teorema 2, denominado Teorema da Assimetria Seletiva, nos mostra que, considerando novamente duas matrizes retangulares $A(m \times n)$ e $B(n \times m)$ de ordens opostas, porém com $m < n$, não necessariamente se obtém $\det(A \times B) = 0$. Isto demonstra uma certa seletividade no núcleo do operador $\det(A \times B)$, de acordo com as condições descritas, que se torna evidente a partir da comparação do caso onde $m > n$ (Teorema 1) com o caso onde $m < n$ (Teorema 2). Por fim, deixa-se, também, em aberto, uma hipótese, que, caso seja validada em estudos posteriores, certamente irá resultar em mais uma propriedade interessante do espaço vetorial das matrizes. Trata-se da Hipótese da Multiplicidade Algébrica.

Palavras-chave: Teorema da Assimetria Matricial, Teorema da Assimetria Seletiva, Matrizes.

INTRODUÇÃO

Durante o ano letivo de 2021, no instituto educacional Colégio JR, localizado na cidade de Goiânia/GO, o orientador Gabriel Arantes ministrava aulas da disciplina de Matemática para a turma da 2^a Série do Ensino Médio, cumprindo o conteúdo programático sobre matrizes. Juntamente com os demais autores, atentaram-se a um padrão matemático intrínseco ao espaço vetorial das matrizes.

Sendo assim, o levantamento das hipóteses se iniciou a partir do seguinte problema, aparentemente trivial: dadas duas matrizes retangulares A e B , onde o número de colunas da matriz A é igual ao número de linhas da matriz B , solicita-se a obtenção do produto matricial $A \times B$ e, posteriormente, o cálculo do determinante deste produto, denotado por $\det(A \times B)$, sempre que isto for possível.

Durante as referidas aulas, o orientador caracterizou o problema proposto a partir de exemplos, empregando matrizes retangulares com ordens menores, a fim de explorar o problema desde os seus desafios mais simples.

Vale ressaltar que, ao longo deste artigo, a ordem de uma matriz será representada no formato $A(m \times n)$, onde “ m ” representa o número de linhas e “ n ” representa o número de colunas da matriz A (LIMA, 1996).



Nesse contexto, de acordo com a descrição do problema proposto, fica claro que somente é possível obter $\det(A \times B)$ se o número de linhas da matriz A for igual ao número de colunas da matriz B (LANG, 1971).

Deste modo, o padrão matemático começou a se tornar evidente a partir do momento em que, durante a exemplificação do problema proposto, foram empregadas matrizes do tipo A(3x2) e B(2x3), com a condição de que o número de linhas da matriz A deveria ser maior do que o seu número de colunas, enquanto a ordem da matriz B deveria ser o contrário da ordem da matriz A. Por conseguinte, notou-se que o resultado do determinante do produto matricial $A \times B$, denotado por $\det(A \times B)$, era invariavelmente nulo, nas condições descritas anteriormente. Ademais, em todos os exemplos explorados, este resultado se mostrou independente dos elementos escolhidos nas linhas e colunas das matrizes A e B. Destarte, levantou-se a hipótese de que tal padrão poderia se manter para matrizes com ordens maiores. Obteve-se, então, uma hipótese generalizada, que, no presente artigo, é devidamente demonstrada, dando origem ao Teorema 1: sejam A($m \times n$) e B($n \times m$) matrizes retangulares tais que $m > n$, então tem-se $\det(A \times B) = 0$. Este teorema será denominado Teorema da Assimetria Matricial. O motivo desta denominação se tornará evidente ao longo do desenvolvimento deste artigo.

Desta forma, tem-se como objetivo analisar e demonstrar esses dois teoremas inéditos da Matemática sobre o espaço vetorial das matrizes, investigando os seus corolários e suas aplicações.

Para isso, foi utilizado o método dedutivo, através do levantamento de hipóteses, com a finalidade de demonstrar o Teorema da Assimetria Matricial (Teorema 1) como um resultado inédito, que foi fundamentado em um padrão matemático relacionado ao espaço vetorial das matrizes.

É de conhecimento geral, no meio científico, que todo teorema matemático possui limitações. No teorema em questão, deve-se atentar a apenas uma limitação, que diz respeito à relação entre as ordens das matrizes, fato que o torna um teorema forte, isto é, um teorema amplo, com poucas restrições.



Ademais, cumpre ressaltar que o estudo analítico do Teorema da Assimetria Matricial irá nos fornecer diversos corolários, que, por sua vez, são consequências diretas do resultado que será demonstrado neste teorema.

Unindo o Teorema da Assimetria Matricial com seus corolários, objetiva-se identificar diversas aplicações práticas, que deverão confirmar a aplicabilidade dos resultados teóricos obtidos, ao longo do desenvolvimento do artigo.

Um corolário é uma consequência direta de uma proposição mais ampla, que já foi demonstrada (LIMA, 1996). Isto posto, é notório que, a partir de um teorema, quanto mais corolários forem desvendados, mais forte este teorema será, tornando-o mais amplo e mais aplicável em diversos campos da Matemática (BOLDRINI et al., 1980).

O Teorema da Assimetria Matricial apresenta onze corolários distintos, no entanto, relacionados, pois derivam de uma mesma proposição. Ao final do desenvolvimento deste artigo, a fim de concretizar e aprofundar o significado holístico por trás do Teorema da Assimetria Matricial, demonstra-se um segundo teorema, igualmente importante e intrigante, denominado Teorema da Assimetria Seletiva (Teorema 2).

Ao final, os autores deixam, também, uma hipótese em aberto, que certamente produzirá frutos formidáveis com futuras demonstrações, devido ao grande impacto do seu enunciado. Trata-se da Hipótese da Multiplicidade Algébrica.

DESENVOLVIMENTO

Teorema 1 (Teorema da Assimetria Matricial): Sejam $A(m \times n)$ e $B(n \times m)$ duas matrizes retangulares quaisquer, tais que $m > n$. Deste modo, tem-se $\det(A \times B) = 0$.

Demonstração: Sejam $A(m \times n)$ e $B(n \times m)$ duas matrizes retangulares quaisquer, tais que $m > n$. De modo genérico, elas podem ser representadas da seguinte maneira:



$$A(m \times n) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$B(n \times m) = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nm} \end{pmatrix}$$

Isto posto, o produto $A \times B$ resultará em uma matriz quadrada C de ordem $m \times m$ tal que:

$$A \times B = C(m \times m) = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mm} \end{pmatrix} = (c_{ij})_{m \times m}$$

Agora, note que:

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1} = \sum_{k=1}^n a_{1k}b_{k1}$$

⋮

$$c_{1m} = a_{11}b_{1m} + a_{12}b_{2m} + \cdots + a_{1n}b_{nm} = \sum_{k=1}^n a_{1k}b_{km}$$

⋮

$$c_{m1} = a_{m1}b_{11} + a_{m2}b_{21} + \cdots + a_{mn}b_{n1} = \sum_{k=1}^n a_{mk}b_{k1}$$

⋮

$$c_{mm} = a_{m1}b_{1m} + a_{m2}b_{2m} + \cdots + a_{mn}b_{nm} = \sum_{k=1}^n a_{mk}b_{km}$$



Sendo assim, a matriz $C(m \times m) = Ax B$ pode ser representada, de modo geral, como:

$$C(m \times m) = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^m a_{1k}b_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^m a_{1k}b_{km} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^m a_{mk}b_{k1} & \cdots & \sum_{k=1}^m a_{mk}b_{km} \end{pmatrix} = \left(\sum_{k=1}^m a_{ik}b_{kj} \right)_{m \times m}$$

$1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq m$ representam, respectivamente, a linha e a coluna da matriz $C(m \times m)$ onde determinado elemento c_{ij} está localizado. Note que os índices dos somatórios foram omitidos, pois todos eles estão indexados de $k = 1$ até $n \in \mathbb{N}$.

Agora, queremos provar que $\det(C) = \det(Ax B) = 0$. Para isso, devemos mostrar que existem duas linhas da matriz $C(m \times m)$ que são linearmente dependentes entre si. Neste caso, utilizaremos a m -ésima linha e a primeira linha da matriz $C(m \times m)$ para tal finalidade. Em suma, basta mostrar que existe uma combinação linear nula entre o somatório dos elementos da m -ésima linha e o somatório dos elementos da primeira linha da matriz $C(m \times m)$. Algebricamente, isto significa que devem existir dois coeficientes reais α e β tais que:

$$\alpha \sum_{j=1}^m c_{mj} - \beta \sum_{j=1}^m c_{1j} = 0$$

Portanto, vamos às vias de fato. Primeiramente, note que:



$$c_{mj} = \sum_{k=1}^n a_{mk} b_{kj}$$

$$c_{1j} = \sum_{k=1}^n a_{1k} b_{kj}$$

Então, escolhendo os coeficientes reais adequados:

$$\alpha = \sum_{k=1}^n a_{1k} \in \mathbb{R}$$

$$\beta = \sum_{k=1}^n a_{mk} \in \mathbb{R}$$

Obtemos a combinação linear nula desejada:



$$\begin{aligned} & \alpha \sum_{j=1}^m c_{mj} - \beta \sum_{j=1}^m c_{1j} = \\ &= \sum_{k=1}^n a_{1k} \sum_{j=1}^m c_{mj} - \sum_{k=1}^n a_{mk} \sum_{j=1}^m c_{1j} = \\ &= \sum_{k=1}^n a_{1k} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n a_{mk} b_{kj} - \sum_{k=1}^n a_{mk} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n a_{1k} b_{kj} = \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n a_{1k} a_{mk} b_{kj} - \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n a_{mk} a_{1k} b_{kj} = \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n a_{1k} a_{mk} b_{kj} - \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n a_{1k} a_{mk} b_{kj} = \\ &= \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \sum_{k=1}^n a_{1k} a_{mk} b_{kj} - \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \sum_{k=1}^n a_{1k} a_{mk} b_{kj} = \\ &= \sum_{j=1}^m \left(\sum_{k=1}^n \sum_{k=1}^n a_{1k} a_{mk} b_{kj} - \sum_{k=1}^n \sum_{k=1}^n a_{1k} a_{mk} b_{kj} \right) = \sum_{j=1}^m 0 = 0 \end{aligned}$$

Portanto, tem-se de fato que $\det(C) = \det(AxB) = 0$. ■

Corolário 1: Se uma matriz quadrada $C(m \times m)$ pode ser decomposta como o produto de duas matrizes retangulares $A(m \times n)$ e $B(n \times m)$ tais que $m > n$, então a matriz $C(m \times m)$ não é inversível.

Demonstração: Pelo Teorema 1, se $C(m \times m) = AxB$ onde $A(m \times n)$ e $B(n \times m)$ são matrizes retangulares, com $m > n$, então $\det(AxB) = \det(C) = 0$. Por definição, se uma matriz quadrada $C(m \times m)$ possui determinante nulo, então ela não admite inversa. ■



$$\mathcal{M} = \{(A, B) \in M \times M \mid A \in M^{m \times n} \text{ e } B \in M^{n \times m}\}$$

Corolário 2: Dados m e n naturais, seja

um subespaço vetorial de $M \times M$, onde M é o espaço vetorial das matrizes. Definimos o

funcional

$$\Lambda : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } \Lambda(A, B) = \det(A \cdot B)$$

. Então, o conjunto S definido a seguir é um subespaço vetorial do núcleo deste funcional, denotado por $\ker(\Lambda)$:

$$S = \{(A, B) \in \mathcal{M} \mid m > n\} \subset \ker(\Lambda)$$

Demonstração: Seja M o espaço vetorial das matrizes. Dados $m, n \in \mathbb{N}$, definimos o

funcional

$$\Lambda : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } \Lambda(A, B) = \det(A \cdot B), \text{ onde } \mathcal{M} = \{(A, B) \in M \times M \mid A \in M^{m \times n} \text{ e } B \in M^{n \times m}\}$$

é um subespaço vetorial de $M \times M$. Por definição, o núcleo deste funcional é dado pelo

conjunto:

$$\ker(\Lambda) = \{(A, B) \in \mathcal{M} \mid \Lambda(A, B) = 0\}$$

Portanto, qualquer subconjunto de $\ker(\Lambda)$ cujos elementos são soluções da equação

$\Lambda(A, B) = 0$ será um subespaço vetorial do mesmo. Deste modo, tem-se:

$$\Lambda(A, B) = 0$$

$$\det(A \cdot B) = 0$$

Pelo Teorema 1, sabemos que todos os pares de matrizes $(A, B) \in \mathcal{M}$ tais que $m > n$ constituem soluções da equação $\Lambda(A, B) = \det(A \cdot B) = 0$. Isto posto, podemos concluir que o conjunto $S = \{(A, B) \in \mathcal{M} \mid m > n\}$ é um subespaço vetorial de $\ker(\Lambda)$. ■

Corolário 3: Dados m e n naturais, seja $\mathcal{M} = \{(A, B) \in M \times M \mid A \in M^{m \times n} \text{ e } B \in M^{n \times m}\}$

um subespaço vetorial de $M \times M$, onde M é o espaço vetorial das matrizes. Então, o

funcional

$$\Lambda : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R} \text{ definido por } \Lambda(A, B) = \det(A \cdot B) \text{ não é bilinear.}$$



Demonstração: Dados m e n naturais, seja

$\mathcal{M} = \{(A, B) \in M \times M \mid A(m \times n) \text{ e } B(n \times m)\}$ um subespaço vetorial de $M \times M$, onde M é o espaço vetorial das matrizes. Então, tomamos o funcional $\Lambda : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ definido por $\Lambda(A, B) = \det(A \times B)$. Dado $\lambda \in \mathbb{R}$, verifica-se facilmente que $\Lambda(\lambda A, B) = \det((\lambda A) \times B) = \det(\lambda(A \times B)) = \lambda^m \cdot \det(A \times B)$, pois $A \times B = C(m \times m)$.

Portanto, conclui-se que não ocorre $\Lambda(\lambda A, B) = \lambda^m \cdot \det(A \times B) = \lambda \cdot \det(A \times B) = \lambda \cdot \Lambda(A, B)$ para todo par $(A, B) \in \mathcal{M}$.

Interpretando o resultado do Corolário 2, este fato se torna evidente, pois devem existir pares de matrizes $(A, B) \notin \ker(\Lambda)$ tais que $\det(A \times B) \neq 0$, o que implica em $\lambda^m \cdot \det(A \times B) \neq \lambda \cdot \det(A \times B)$, isto é, $\Lambda(\lambda A, B) \neq \lambda \cdot \Lambda(A, B)$. Por conseguinte, tal constatação fere a definição de funcional bilinear. ■

Corolário 4: Se uma matriz quadrada $C(m \times m)$ pode ser decomposta como o produto de duas matrizes retangulares $A(m \times n)$ e $B(n \times m)$ tais que $m > n$, então a matriz $C(m \times m)$ pode admitir múltiplas decomposições do tipo LU.

Demonstração: Dados $m, n \in \mathbb{N}$, com $m > n$, escolhemos duas matrizes retangulares $A(m \times n)$ e $B(n \times m)$ tais que $A \times B = C(m \times m)$ é uma matriz quadrada. Pelo Teorema 1, sabemos que $\det(C) = 0$, nestas condições. Sabe-se que, se uma matriz quadrada possui determinante não-nulo, então ela admite uma única decomposição LU. De acordo com a contrapositiva desta afirmação, a matriz $C(m \times m)$ em questão pode admitir mais de uma decomposição do tipo LU. ■

Corolário 5: Seja $C(m \times m)$ uma matriz quadrada que pode ser decomposta como o produto de duas matrizes retangulares $A(m \times n)$ e $B(n \times m)$ tais que $m > n$. Seja $C = L \times U$ uma possível decomposição LU desta matriz $C(m \times m)$. Então, a matriz $L(m \times m)$ ou a matriz $U(m \times m)$ possuem linhas nulas.

Demonstração: Dados $m, n \in \mathbb{N}$, com $m > n$, escolhemos duas matrizes retangulares $A(m \times n)$ e $B(n \times m)$ tais que $A \times B = C(m \times m)$ é uma matriz quadrada. Pelo Teorema 1,



sabemos que $\det(C) = 0$, nestas condições. Pelo Corolário 4, sabemos também que a matriz $C(m \times m)$ em questão admite pelo menos duas fatorações LU distintas. Em todas elas, tem-se $C = L \times U$, onde $L(m \times m)$ é uma matriz triangular inferior e $U(m \times m)$ é uma matriz triangular superior. Pelo Teorema de Binet, se $C = L \times U$, então $\det(C) = \det(L \times U) = \det(L) \cdot \det(U)$. Como $\det(C) = 0$, tem-se $\det(L) \cdot \det(U) = 0$. Isto significa que $\det(L) = 0$ ou $\det(U) = 0$. Se $\det(L) = 0$, então a matriz $L(m \times m)$ possui pelo menos uma linha nula. Se $\det(U) = 0$, então a matriz $U(m \times m)$ possui pelo menos uma linha nula. ■

Como exemplo ilustrativo deste Corolário 5, toma-se duas matrizes retangulares $A(3 \times 2)$ e $B(2 \times 3)$ em particular, apresentadas a seguir.

$$A(3 \times 2) = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 5 & -7 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B(2 \times 3) = \begin{pmatrix} -8 & 3 & -4 \\ -1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

O produto $A \times B = C(3 \times 3)$ resulta na seguinte matriz quadrada:

$$C(3 \times 3) = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 28 \\ -33 & 1 & -62 \\ -26 & 13 & 0 \end{pmatrix}$$

Note que o determinante desta matriz $C(3 \times 3)$ é nulo. Veja:

$$\det(C) = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 28 \\ -33 & 1 & -62 \\ -26 & 13 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -33 & 1 \\ -26 & 13 \end{vmatrix} = 0$$



Este resultado já era esperado, de acordo com o que foi demonstrado no Teorema 1. Portanto, de acordo com o Corolário 5, na decomposição LU desta matriz $C(3 \times 3)$, certamente a matriz $L(3 \times 3)$ ou a matriz $U(3 \times 3)$ possuem pelo menos uma linha nula. De fato, observe uma possível decomposição LU da matriz $C(3 \times 3)$ a seguir.

$$C(3 \times 3) = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 28 \\ -33 & 1 & -62 \\ -26 & 13 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{-33}{4} & 1 & 0 \\ \frac{-13}{2} & \frac{14}{13} & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & 5 & 28 \\ 0 & \frac{169}{4} & 169 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = L \times U$$

Donde, nesta decomposição, temos as matrizes $L(3 \times 3)$ e $U(3 \times 3)$ a seguir:

$$L(3 \times 3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{-33}{4} & 1 & 0 \\ \frac{-13}{2} & \frac{14}{13} & 1 \end{pmatrix}$$

$$U(3 \times 3) = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 28 \\ 0 & \frac{169}{4} & 169 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Observe que, conforme esperado de acordo com o Corolário 5, a matriz $U(3 \times 3)$ possui uma linha nula, neste caso, a terceira linha.

Corolário 6: Seja $C(m \times m)$ uma matriz quadrada que pode ser decomposta como o produto de duas matrizes retangulares $A(m \times n)$ e $B(n \times m)$ tais que $m > n$. Então, a matriz $C(m \times m)$ possui pelo menos um autovalor nulo $\lambda = 0$.

Demonstração: Dados $m, n \in \mathbb{N}$, com $m > n$, escolhemos duas matrizes retangulares $A(m \times n)$ e $B(n \times m)$ tais que $A \times B = C(m \times m)$ é uma matriz quadrada. Pelo Teorema 1, sabemos que $\det(C) = 0$, nestas condições. Isto significa que $C(m \times m)$ é uma matriz



singular. Toda matriz singular possui pelo menos um autovalor nulo, $\lambda_k = 0$. Isto se deve ao fato de que o determinante de qualquer matriz quadrada $C(m \times m)$ de ordem $m \in \mathbb{N}$ é igual ao produto dos seus m -autovalores, ou seja:

$$\det(C) = \prod \lambda_k = \lambda_1 \lambda_2 (\dots) \lambda_m \text{ com } 1 \leq k \leq m. \quad \text{. Deste modo, se } \det(C) = 0, \text{ então}$$

$$\prod \lambda_k = \lambda_1 \lambda_2 (\dots) \lambda_m = 0, \text{ donde pelo menos um dos autovalores } \lambda_k \text{ é nulo. } \blacksquare$$

Corolário 7: Seja $C(m \times m)$ uma matriz quadrada que pode ser decomposta como o produto de duas matrizes retangulares $A(m \times n)$ e $B(n \times m)$ tais que $m > n$. Então, o sistema homogêneo $CX = 0$ é possível e indeterminado.

Demonstração: Dados $m, n \in \mathbb{N}$, com $m > n$, escolhemos duas matrizes retangulares $A(m \times n)$ e $B(n \times m)$ tais que $A \times B = C(m \times m)$ é uma matriz quadrada. Pelo Teorema 1,

sabemos que $\det(C) = 0$, nestas condições. Seja $X = (x_i) \text{ com } 1 \leq i \leq m$ uma matriz-coluna contendo m -variáveis reais x_1, x_2, \dots, x_m de tal modo que X possui ordem $m \times 1$, ou seja, X possui m linhas e uma coluna.

$$X(m \times 1) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

Seja $0(m \times 1)$ a matriz-coluna nula de ordem $m \in \mathbb{N}$.

$$0(m \times 1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Definimos, então, o sistema homogêneo representado pela equação matricial:



$$C \times X = 0$$

Onde a matriz $C(m \times m)$ é a matriz dos coeficientes das m -variáveis reais x_1, x_2, \dots, x_m da matriz $X(m \times 1)$. Tendo em vista que $\det(C) = 0$, existem duas possibilidades para o sistema homogêneo $CX = 0$, quais sejam: impossível (ausência de soluções) ou possível e indeterminado (infinitas soluções). Todo sistema homogêneo admite pelo menos a solução trivial nula, donde se tem $x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_m = 0$. Isto já descarta a possibilidade do sistema $CX = 0$ em questão ser impossível. Portanto, por exaustão das possibilidades, o sistema homogêneo $CX = 0$ é possível e indeterminado. ■

Corolário 8: Considere um sistema linear temporal de equações diferenciais ordinárias 2×2 . Se a matriz quadrada dos coeficientes $C(2 \times 2)$ do sistema admitir uma decomposição do tipo $C = AxB$ tal que $A(2 \times 1)$ e $B(1 \times 2)$ são matrizes retangulares, então o retrato de fase das soluções $x = x(t)$ e $y = y(t)$ do sistema apresenta uma reta de pontos de equilíbrio (caso degenerado).

Demonstração: Considere o sistema linear $S(2 \times 2)$ de equações diferenciais ordinárias a seguir, onde $x = x(t)$ e $y = y(t)$ são ambas funções dependentes do tempo.

$$S(2 \times 2) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + by \\ \frac{dy}{dt} = cx + dy \end{cases}$$

Podemos transcrever este sistema na forma matricial da seguinte maneira:



$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$C(2 \times 2) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Onde $C(2 \times 2)$ é a matriz quadrada dos coeficientes do sistema $S(2 \times 2)$. Suponha que esta matriz admita uma decomposição do tipo $C = AxB$ onde $A(2 \times 1)$ e $B(1 \times 2)$ são matrizes retangulares. Pelo Teorema 1, temos então que $\det(AxB) = \det(C) = 0$. Consideremos agora o polinômio característico dessa matriz $C(2 \times 2)$ dado a seguir:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \text{tr}(C) \cdot \lambda + \det(C)$$

Como $\det(C) = 0$ e $\text{tr}(C) = a + d$, segue que:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - (a + d) \cdot \lambda$$

As raízes do polinômio característico da matriz $C(2 \times 2)$ são os seus autovalores:

$$p(\lambda) = 0$$

$$\lambda^2 - (a + d) \cdot \lambda = 0$$

$$\lambda \cdot [\lambda - (a + d)] = 0$$

$$\therefore \lambda_1 = 0$$

$$\lambda_2 - (a + d) = 0$$

$$\therefore \lambda_2 = a + d = \text{tr}(C)$$



Conforme esperado, de acordo com o resultado do Corolário 6, a matriz $C(2x2)$ em questão possui pelo menos um autovalor nulo $\lambda_1 = 0$. Vamos então analisar as

$\lambda_2 = a + d = \text{tr}(C)$.
possibilidades para o outro autovalor

(I) Se $\text{tr}(C) > 0$, ou seja, $a > -d$, tem-se $\lambda_2 > 0$ e então o retrato de fase formado pelas soluções $x = x(t)$ e $y = y(t)$ apresentará uma reta de pontos de equilíbrio repulsores.

(II) Se $\text{tr}(C) < 0$, ou seja, $a < -d$, tem-se $\lambda_2 < 0$ e então o retrato de fase formado pelas soluções $x = x(t)$ e $y = y(t)$ apresentará uma reta de pontos de equilíbrio atratores.

(III) Se $\text{tr}(C) = 0$, ou seja, $a = -d$, tem-se $\lambda_2 = 0$ e então o sistema $S(2x2)$ de EDO admite apenas as soluções triviais $x(t) = 0$ e $y(t) = 0$, um caso também degenerado. ■

Corolário 9 (Dependência Linear): Seja $C(mxm)$ uma matriz quadrada que pode ser decomposta como o produto de duas matrizes retangulares $A(mxn)$ e $B(nxm)$ tais que $m > n$. Então, a matriz $C(mxm)$ possui linhas linearmente dependentes.

Demonstração: Dados $m, n \in \mathbb{N}$, com $m > n$, escolhemos duas matrizes retangulares $A(mxn)$ e $B(nxm)$ quaisquer, de modo que $AxB = C(mxm)$ é uma matriz quadrada. Pelo Teorema 1, sabemos que $\det(C) = 0$, nestas condições. Na própria demonstração do Teorema 1, exibida anteriormente, este resultado deriva justamente do fato de que existe uma combinação linear nula entre a primeira linha e a m -ésima linha da matriz $C(mxm)$, tornando-as linearmente dependentes. ■

Corolário 10: Seja $C(2x2) = (a_{i1}b_{1j})$ uma matriz quadrada que pode ser decomposta como o produto de duas matrizes retangulares $A(2x1) = (a_{i1})$ e $B(1x2) = (b_{1j})$ donde se tem



$i, j \in \{1,2\}$.

Então, o autovalor nulo $\lambda = 0$ da matriz $C(2 \times 2)$ possui multiplicidade algébrica igual a 1 se, e somente se, ocorrer $a_{11}b_{11} \neq -a_{21}b_{12}$.

Demonstração: Sejam as matrizes retangulares genéricas $A(2 \times 1)$ e $B(1 \times 2)$ abaixo:

$$A(2 \times 1) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$$

$$B(1 \times 2) = (b_{11} \quad b_{12})$$

O produto matricial $A \times B$ resultará na matriz quadrada $C(2 \times 2)$ a seguir:

$$A \times B = C(2 \times 2) = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} \end{pmatrix}$$

Note que $\det(C) = 0$, conforme esperado, de acordo com o Teorema 1. Vamos agora determinar os autovalores da matriz $C(2 \times 2)$.

$$\det(C - \lambda I) = 0$$

$$\begin{vmatrix} a_{11}b_{11} - \lambda & a_{11}b_{12} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(a_{11}b_{11} - \lambda)(a_{21}b_{12} - \lambda) - a_{11}b_{12}a_{21}b_{11} = 0$$

$$a_{11}b_{11}a_{21}b_{12} - a_{11}b_{11}\lambda - a_{21}b_{12}\lambda + \lambda^2 - a_{11}b_{12}a_{21}b_{11} = 0$$

$$\lambda^2 - (a_{11}b_{11} + a_{21}b_{12})\lambda + (a_{11}a_{21}b_{11}b_{12} - a_{11}a_{21}b_{11}b_{12}) = 0$$

$$\lambda^2 - (a_{11}b_{11} + a_{21}b_{12})\lambda = 0$$

$$\lambda[\lambda - (a_{11}b_{11} + a_{21}b_{12})] = 0$$



Desta equação, podemos deduzir que:

$$\lambda_1 = 0$$

$$\lambda_2 - (a_{11}b_{11} + a_{21}b_{12}) = 0$$

$$\lambda_2 = a_{11}b_{11} + a_{21}b_{12}$$

Donde podemos observar que $\lambda_2 \neq 0$ se, e somente se, ocorrer $a_{11}b_{11} \neq -a_{21}b_{12}$. ■

Corolário 11 (Decomposição Assimétrica 2x2): Sejam $i, j \in \{1,2\}$. Tomemos uma matriz quadrada $C(2x2) = (c_{ij})$ qualquer. A fim de verificar se existem decomposições $C = A \times B$ onde $A(2x1) = (a_{i1})$ e $B(1x2) = (b_{1j})$ são matrizes retangulares, basta averiguar se $\det(C) = 0$. Em caso afirmativo, tem-se $C(2x2) = (c_{ij}) = (a_{i1}b_{1j})$. Além disso, tem-se infinitas decomposições possíveis. Dentre elas, destaca-se a seguinte:

$$C = A \times B \Rightarrow \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & \frac{c_{12}}{c_{11}} \\ 1 & \frac{c_{22}}{c_{11}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & \frac{c_{22}}{c_{21}} \\ 1 & \frac{c_{12}}{c_{21}} \end{pmatrix}$$

Demonstração: Sejam $i, j \in \{1,2\}$. Tomemos a matriz quadrada genérica: $C(2x2) = (c_{ij})$

$$C(2 \times 2) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

Vamos partir da hipótese de que o determinante da matriz $C(2x2)$ é nulo, ou seja:

$$\det(C) = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} = 0$$



De acordo com o Teorema da Assimetria Matricial, devem existir decomposições do tipo $C = A \times B$ onde $A(2 \times 1) = (a_{i1})$ e $B(1 \times 2) = (b_{1j})$ são matrizes retangulares:

$$A(2 \times 1) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$$

$$B(1 \times 2) = (b_{11} \ b_{12})$$

$$C = A \times B \Leftrightarrow A \times B = C$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

A partir desta igualdade matricial, obtemos o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} a_{11}b_{11} = c_{11} \\ a_{11}b_{12} = c_{12} \\ a_{21}b_{11} = c_{21} \\ a_{21}b_{12} = c_{22} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11} = c_{11}/b_{11} \\ a_{11} = c_{12}/b_{12} \\ a_{21} = c_{21}/b_{11} \\ a_{21} = c_{22}/b_{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{c_{11}}{b_{11}} = \frac{c_{12}}{b_{12}} \\ \frac{c_{21}}{b_{11}} = \frac{c_{22}}{b_{12}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_{11}b_{12} - c_{12}b_{11} = 0 \\ c_{21}b_{12} - c_{22}b_{11} = 0 \end{cases}$$

Analisando a matriz dos coeficientes do sistema linear obtido, verificamos que o seu determinante é nulo:

$$\begin{vmatrix} c_{11} & -c_{12} \\ c_{21} & -c_{22} \end{vmatrix} = c_{12}c_{21} - c_{11}c_{22} = -(c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}) = - \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} = -\det(C) = 0$$

Neste caso, temos um sistema possível e indeterminado. Portanto, devem existir infinitas decomposições $C = A \times B$ possíveis. Dentre elas, vamos destacar aquela onde se fixa o valor $b_{11} = 1$, de tal modo que se obtém o seguinte resultado:



$$b_{11} = 1 \Rightarrow b_{12} = \frac{c_{12}}{c_{11}} = \frac{c_{22}}{c_{21}} \Rightarrow \begin{cases} a_{11} = c_{11} \\ a_{21} = c_{21} \end{cases}$$

$$A(2 \times 1) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{pmatrix}$$

$$B(1 \times 2) = (b_{11} \quad b_{12}) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{c_{12}}{c_{11}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{c_{22}}{c_{21}} \end{pmatrix}$$

Assim, fica demonstrado que, de fato:

$$C = A \times B$$

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & \frac{c_{12}}{c_{11}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & \frac{c_{22}}{c_{21}} \end{pmatrix}$$

É uma decomposição possível para toda matriz quadrada $C(2 \times 2)$ singular, isto é, cujo determinante é nulo. ■

A título de exemplo ilustrativo do resultado que acabamos de demonstrar no Corolário 11, considere a seguinte matriz singular $C(2 \times 2)$ em particular:

$$C(2 \times 2) = \begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

$$\det(C) = \begin{vmatrix} -6 & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = (-6) \cdot (-2) - 4 \cdot 3 = 12 - 12 = 0$$



Então, de acordo com o Algoritmo da Decomposição Assimétrica 2x2, segue que:

$$A(2 \times 1) = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$B(1 \times 2) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{c_{12}}{c_{11}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{-6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

De tal modo que obtemos $C = Ax B$ da maneira como está explicitada abaixo:

$$C = A \times B$$

$$\begin{pmatrix} -6 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Hipótese da Multiplicidade Algébrica: Seja $C(m \times m)$ uma matriz quadrada que pode ser decomposta como o produto de duas matrizes retangulares $A(m \times n)$ e $B(n \times m)$ donde se tem $m > n$. Então, o autovalor nulo $\lambda = 0$ da matriz $C(m \times m)$ possui multiplicidade algébrica maior ou igual à diferença entre m e n . Noutros termos, seja $\alpha \in \mathbb{N}$ a multiplicidade algébrica do autovalor nulo $\lambda = 0$ da matriz $C(m \times m)$. Então, nas condições descritas anteriormente, devemos ter $\alpha \geq m - n$.

Teorema 2 (Teorema da Assimetria Seletiva): Sejam $A(m \times n)$ e $B(n \times m)$ duas matrizes retangulares quaisquer, tais que $m < n$. Então, pode ocorrer $\det(Ax B) \neq 0$.

Demonstração: Dados m e n naturais, seja $\mathcal{M} = \{(A, B) \in M \times M \mid A(m \times n) \text{ e } B(n \times m)\}$ um subespaço vetorial de $M \times M$, onde M é o espaço vetorial das matrizes. Definimos então o funcional

$\Lambda : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\Lambda(A, B) = \det(Ax B)$. Seja $S = \{(A, B) \in \mathcal{M} \mid m > n\}$ um subconjunto de \mathcal{M} , cujos elementos são todos os pares de matrizes $A(m \times n)$ e



$B(n \times m)$ tais que $m > n$. De acordo com o que foi demonstrado no Corolário 2 do Teorema da Assimetria Matricial, temos que S constitui um subespaço vetorial de $\ker(\Lambda)$, que, por sua vez, é o núcleo do funcional Λ . Em símbolos, mostramos que

$S \subset \ker(\Lambda)$. Isto significa que

$(A, B) \in S \Rightarrow \Lambda(A, B) = \det(A \times B) = 0$. Agora, considere o conjunto definido por $S' = \{(A, B) \in \mathcal{M} \mid m < n\}$, cujos elementos são todos os pares de matrizes $A(m \times n)$ e $B(n \times m)$ tais que $m < n$. Por conseguinte, tem-se $S \cap S' = \emptyset$. Pelo Teorema de Binet, sabemos que $\det(A \times B) = \det(A) \cdot \det(B) = \det(B) \cdot \det(A) = \det(B \times A)$ se, e somente se, as matrizes A e B forem quadradas, ou seja, se elas possuírem a mesma quantidade de linhas e de colunas. Caso contrário, pode ocorrer $\det(A \times B) \neq \det(B \times A)$. Portanto, dado o par de matrizes $(A, B) \in S'$ pode ocorrer $\Lambda(A, B) = \det(A \times B) \neq \det(B \times A) = 0$. ■

Interpretando, em termos simples, o significado do Teorema da Assimetria Seletiva, em comparação com o resultado do Teorema da Assimetria Matricial, sejam $A(m \times n)$ e $B(n \times m)$ duas matrizes retangulares, tais que o produto $A \times B = C(m \times m)$ de ambas constitui uma matriz quadrada. Se $m > n$, então obrigatoriamente ocorre $\det(C) = 0$. Se $m < n$, então não necessariamente ocorre $\det(C) = 0$. Tanto no caso onde $m > n$ quanto no caso onde $m < n$, tem-se por hipótese uma decomposição assimétrica da matriz quadrada $C(m \times m)$ em duas matrizes retangulares $A(m \times n)$ e $B(n \times m)$. No entanto, tal assimetria é seletiva com relação ao funcional $\Lambda : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ definido por $\Lambda(A, B) = \det(A \times B)$, pois todos os pares de matrizes retangulares $(A, B) \in \mathcal{M}$ tais que $m > n$ pertencem ao núcleo do funcional Λ , denotado por $\ker(\Lambda)$, enquanto que nem todos os pares de matrizes retangulares $(A, B) \in \mathcal{M}$ tais que $m < n$ pertencem a $\ker(\Lambda)$.



CONSIDERAÇÕES FINAIS

O Teorema da Assimetria Matricial (Teorema 1) é um resultado que pode ser amplamente aplicado em problemas que envolvem matrizes com ordens assimétricas, isto é, pares de matrizes retangulares do tipo $A(m \times n)$ e $B(n \times m)$, com a única condição de que se deve ter $m > n$.

Problemas envolvendo matrizes são geralmente associados à organização de dados, variáveis, informações, vetores, dentre outros elementos, dispostos em linhas e colunas, no formato de uma tabela, que comumente caracteriza uma matriz (HOFFMAN e KUNZE, 1979). Sendo assim, o Teorema 1 certamente pode contribuir para a resolução de problemas que envolvem a disposição assimétrica de dados, variáveis, informações ou vetores em matrizes retangulares.

Ademais, os autores sugerem, por exemplo, a investigação do problema da assimetria de bárions na Cosmologia, que visa examinar o motivo pelo qual a matéria bariônica prevaleceu sobre a antimateria bariônica, no momento de origem do nosso Universo observável, durante um breve instante de tempo singular do Big Bang, onde ocorreu o desequilíbrio entre as quatro forças fundamentais da natureza, enquanto ainda estavam unificadas. Intuitivamente, os autores suspeitam que o resultado do Teorema da Assimetria Matricial, juntamente com os seus corolários, pode contribuir para a investigação do problema da assimetria de bárions na Cosmologia, que está em aberto no campo da Física Moderna por muitas décadas.

Além disso, agrega-se o resultado demonstrado no Teorema da Assimetria Seletiva (Teorema 2) a este contexto, a fim de assegurar a completude da interpretação matricial do problema da assimetria bariônica. Além do que foi proposto, seguramente os resultados dos teoremas e dos corolários demonstrados neste artigo podem contribuir para a resolução de diversos problemas intrínsecos à própria Matemática, em diferentes áreas e dimensões, tais como Álgebra Linear, Criptografia, Métodos Numéricos, Equações Diferenciais, Topologia, dentre outros campos que utilizam das ferramentas próprias do espaço vetorial das matrizes, conforme foi verificado ao longo do desenvolvimento deste estudo. Por fim, espera-se também que estudos futuros revelem a validade ou a não-validade da Hipótese da Multiplicidade Algébrica, através



de uma demonstração rigorosa, pois, caso o enunciado desta hipótese seja validado, a comunidade científica terá mais uma ferramenta matemática poderosa ao seu dispor, capaz de ampliar as contribuições deste artigo.

Por fim, diante dos inúmeros resultados obtidos neste estudo, é importante destacar que o Teorema da Assimetria Matricial (Teorema 1) demonstra uma propriedade inédita sobre o espaço vetorial das matrizes, assim, expandindo os horizontes de diversas áreas da Matemática que utilizam as matrizes como elementos básicos de construção. Todos os onze corolários obtidos a partir do Teorema 1 reforçam a sua generalidade e a sua amplitude, provando o seu poder de aplicação. Além disso, o resultado demonstrado no Teorema da Assimetria Seletiva (Teorema 2) confere completude à interpretação holística do funcional $\Lambda : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ definido por $\Lambda(A, B) = \det(AxB)$, tornando evidente a existência de uma seletividade, isto é, uma preferência, verificada no núcleo $\ker(\Lambda)$ deste funcional, onde predominam os pares de matrizes retangulares $A(m \times n)$ e $B(n \times m)$ onde $m > n$, em detrimento do caso onde $m < n$, produzindo uma assimetria no núcleo $\ker(\Lambda)$. A Hipótese da Multiplicidade Algébrica permanece sem demonstração, o que a torna objeto de estudo em artigos futuros.

REFERÊNCIAS

BOLDRINI, José Luiz. et al. Álgebra Linear. São Paulo. Editora Harbra, 1980.

HOFFMAN, Kenneth; KUNZE, Ray. Álgebra Linear. Rio de Janeiro. Editora LTC, 1979.

LANG, Serge. Álgebra Linear. Editora Edgard Blücher. Rio de Janeiro, 1971.

LIMA, Elon Lages. Álgebra Linear. Projeto Euclides. IMPA. Rio de Janeiro, 1996.

Enviado: Novembro, 2021.

Aprovado: Agosto, 2022.

¹ Especialista Lato Sensu (Pós-graduação) em Ensino de Estatística pela UFN, Licenciado em Física pela PUC Goiás, Licenciado em Química pela PUC Goiás. ORCID: 0000-0001-6298-1906.

² Estudante do Ensino Médio no Colégio JR de Goiânia.



³ Estudante do Ensino Médio no Colégio JR de Goiânia.

⁴ Estudante do Ensino Médio no Colégio JR de Goiânia.

⁵ Estudante do Ensino Médio no Colégio JR de Goiânia.

⁶ Estudante do Ensino Médio no Colégio JR de Goiânia.

⁷ Estudante do Ensino Médio no Colégio JR de Goiânia.