PROGRESSÃO ARITMÉTICA DE ORDEM SUPERIOR: PROGRESSÃO ARITMÉTICA GERADA POR UMA SEQUÊNCIA DE TERMOS DO TIPO $A^{K}{}_{N}$

ARTIGO ORIGINAL

CARNEIRO, Tiago Isaac dos Santos[1]

CARNEIRO, Tiago Isaac dos Santos. **Progressão Aritmética de ordem superior: Progressão Aritmética gerada por uma sequência de termos do tipo $a^{K}{}_{n}$.** Revista Científica Multidisciplinar Núcleo do Conhecimento. Ano. 07, Ed. 07, Vol. 06, pp. 63-91. Julho de 2022. ISSN: 2448-0959, Link de acesso: https://www.nucleodoconhecimento.com.br/matematica/ordem-superior , DOI: 10.32749/nucleodoconhecimento.com.br/matematica/ordem-superior

RESUMO

Atualmente o estudo da Progressão Aritmética de ordem superior é bastante limitado no quesito de uma formulação matemática mais simples. Alguns autores mencionam ordem superior, como uma equação polinomial de grau k. O objetivo deste trabalho é fazer um contraponto das definições apresentadas de outros trabalhos, através de uma fórmula matemática original que gera progressões aritméticas de qualquer ordem através das diferenças sucessivas de um termo a_{n+1} pelo termo a_n de cada linha, até que se obtenha uma sequência estacionaria na linha ou ordem k, chamada de progressão aritmética gerada de ordem superior.

Palavras-chave: Progressão Aritmética, Formulação Matemática, Ordem Superior, Diferenças Sucessivas.

1. INTRODUÇÃO

Atualmente o estudo da Progressão Aritmética de ordem superior é bastante limitado no quesito de uma formulação matemática mais simples. Alguns autores mencionam ordem superior, como uma equação polinomial de grau k. O objetivo deste trabalho é fazer um contraponto das definições apresentadas de outros trabalhos, através de uma fórmula matemática original que gerem progressões aritméticas de qualquer ordem, através das diferenças sucessivas de um termo a_{n+1} pelo termo a_n de cada linha, até que se obtenha uma sequência estacionaria na linha ou ordem k, chamada de Progressão Aritmética gerada de ordem superior.

Como diz Filho (2020), a formulação da Progressão teve grande contribuição do matemático Carl Friederich Gauss, quando o seu professor lhe pediu para somar os termos de 1 a 100, e este aos 7 anos de idade fez aplicando a fórmula da soma dos termos da PA.

De acordo com Diógenes e Lima (2020), a Progressão Aritmética de ordem k está relacionada com um polinômio de grau k. A definição de ordem segundo Nobre e Rocha (2018), é a aplicação do operador diferença entre os termos a_{n+1} e a_n , que resultará em linhas subsequentes, uma determinada sequência até chegar a uma ordem em que se obtenha uma sequência estacionária.

2. PROGRESSÃO ARITMÉTICA GERADA POR UMA SEQUÊNCIA DE TERMOS DO TIPO a_n^K

Seja n termos do tipo a_n^K abaixo:

$$a_1^K \; a_2^K \; a_3^K \; a_4^K \; .... \; a_n^K$$

Os termos $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ é a base geradora de uma Progressão Aritmética de ordem k, que também é uma Progressão Aritmética de ordem k=1. Os valores de k, que percorrem toda a sequência, é quem vai determinar em qual linha ou ordem está sendo gerada a nova Progressão Aritmética de razão $r_p > r$

2.1 PA DE ORDEM K=1

2.1.1 EXEMPLO

Seja uma PA $a_1 = 1 \text{ e } r = 1$, então

$$1^1, 2^1, 3^1, 4^1, 5^1, 6^1, 7^1 ,$$

Aplicando o operador diferença dos termos, tem-se: $a_2 - a_1, a_3 - a_2$, ou seja $a_{n+1} - a_n = r$, como K=1 define a ordem ou linha que está sendo gerada uma nova PA, logo a PA gerada é a mesma da geradora, e seu termo geral já é conhecido:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

2.2 PA DE ORDEM K=2

Fórmula Geral: $P_n = a_{n+1}^2 - a_n^2$

2.2.1 EXEMPLO

Seja $a_1 = 1 \text{ e } r = 1$, como foi dito anteriormente segue o mesmo raciocínio para k=2.

$$1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2$$

Aplicando o operador diferença de cada termo nas linhas k=1 e k=2 , obtém-se:

$K = 1$	1	4	9	16	25	36	49
$K = 2$		3	5	7	9	11	13
r_P		2	2	2	2	2	

Note que a PA de razão r_P é maior que r que é a razão da nova PA gerada na linha $K = 2$. A PA gerada será denotada por P_n. Note que $P_n \neq a_n \; \forall \, K > 1$, o valor $r_P = 2r$ para $r = 1$. Analisando a diferença dos termos de cada linha de sequência obteremos uma expressão geral de uma PA gerada de $K = 2$, assim:

$$P_1 = a_2^2 - a_1^2$$
$$P_2 = a_3^2 - a_2^2$$
$$P_3 = a_4^2 - a_3^2$$

.

.

.

$$P_n = a_{n+1}^2 - a_n^2$$

Que é o termo geral da PA gerada $\forall \, K = 2$.
Demonstração:
Seja uma PA em que seus termos têm um expoente $K = 2$

$$a_1^2 \; a_2^2 \; a_3^2 \; a_4^2 \; .... \; a_n^2$$

a_1^2	a_2^2	a_3^2	a_4^2	a_5^2	a_6^2	a_7^2
	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
	r_P	r_P	r_P	r_P	r_P	

$$P_1 = a_2^2 - a_1^2$$

$$P_1 = a_2^2 - a_1^2$$

$$P_1 = a_2^2 - a_1^2$$

.

.

.

$$P_n = a_{n+1}^2 - a_n^2$$

2.2.2 EXEMPLO

Sejam $r = 2$, $K = 2$ e $a_1 = 1$, obtém-se a PA gerada:

$$1^2, 3^2, 5^2, 7^2, 9^2, 11^2, 13^2$$

$K = 1$	1	9	25	49	81	121	169
$K = 2$		8	16	24	32	40	48
rp		8	8	8	8	8	

onde P_n está localizado em $K = 2$ que mais uma vez determina a ordem da PA gerada e $r_P = 4r$ para $r = 2$.

2.2.3 EXEMPLO

Sejam, $r = 3$, $K = 2$ e $a_1 = 1$, obtém-se a sequência e a PA gerada:

$$1^2, 4^2, 7^2, 10^2, 13^2, 16^2, 19^2$$

$K = 1$	1	16	49	100	169	256	361
$K = 2$		15	33	51	69	87	105
rp		18	18	18	18	18	

onde P_n está localizado em $K = 2$ tal que $r_P = 6r$ para $r = 3$

2.3 PA DE ORDEM K=3

Fórmula Geral: $P_n = a_{n+2}^3 - 2a_{n+1}^3 + a_n^3$

2.3.1 EXEMPLO

Para $r = 1, K = 3$ e $a_1 = 1$, segue abaixo:

$$1^3, 2^3, 3^3, 4^3, 5^3, 6^3, 7^3, 8^3, 9^3, 10^3, 11^3$$

P_n está localizado em $K = 3$ e $r_P = 6r$ para $r = 1$

RC: 122729
Disponível em: https://www.nucleodoconhecimento.com.br/matematica/ordem-superior

Demonstração

Seja uma PA em que seus termos têm o expoente K=3

$$a_1^3 \; a_2^3 \; a_3^3 \; a_4^3 \; .... \; a_n^3$$

$K=1$	a_1^3		a_2^3		a_3^3		a_4^3		a_5^3		a_6^3		a_7^3
$K=2$		x_1		x_2		x_3		x_4		x_5		x_6	
$K=3$			P_1		P_2		P_3		P_4		P_5		
rp				rp		rp		rp		rp			

$$x_1 = a_2^3 - a_1^3 \qquad P_1 = x_2 - x_1$$
$$x_2 = a_3^3 - a_2^3 \qquad P_2 = x_3 - x_2$$
$$x_3 = a_4^3 - a_3^3 \qquad P_3 = x_4 - x_3$$
$$x_4 = a_5^3 - a_4^3$$

Substituindo os valores em x, temos:

$$P_1 = (a_3^3 - a_2^3) - (a_2^3 - a_1^3) \;\therefore\; P_1 = a_3^3 - 2a_2^3 + a_1^3$$
$$P_2 = (a_4^3 - a_3^3) - (a_3^3 - a_2^3) \;\therefore\; P_2 = a_4^3 - 2a_3^3 + a_2^3$$
$$P_3 = (a_5^3 - a_4^3) - (a_4^3 - a_3^3) \;\therefore\; P_3 = a_5^3 - 2a_4^3 + a_3^3$$

.

.

.

$$P_n = (a_{n+2}^3 - a_{n+1}^3) - (a_{n+1}^3 - a_n^3) \;\therefore\; P_n = a_{n+2}^3 - 2a_{n+1}^3 + a_n^3$$

2.3.2 EXEMPLO

Sejam $r = 2$, $K = 3$ e $a_1 = 1$, segue a sequência e a PA gerada.

$$1^3, 3^3, 5^3, 7^3, 9^3, 11^3, 13^3, 15^3, 17^3$$

$K = 1$	1	27	125	343	729	1331	2197
$K = 2$		26	98	218	386	602	866
$K = 3$		72	120	168	216	264	
rp			48	48	48	48	

P_n está localizado em $K = 3$ e $r_p = 24r$ para $r = 2$.

2.4 PA DE ORDEM K=4

Fórmula Geral: $P_n = a_{n+3}^4 - 3a_{n+2}^4 + 3a_{n+1}^4 - a_n^4$

2.4.1 EXEMPLO

PA de razão $r = 1$, $K = 4$ e $a_1 = 1$, obtem-se a PA gerada.

$$1^4,\ 2^4,\ 3^4,\ 4^4,\ 5^4,\ 6^4,\ 7^4, 8^4,\ 9^4$$

$K = 1$	1		16		81		256		625		1296		2401		4096		6561	
$K = 2$		15		65		175		369		671		1105		1695		2465		
$K = 3$			50		110		194		302		434		590		770			
$K = 4$				60		84		108		132		156		180				
rp					24		24		24		24		24					

P_n está localizado em $K = 4$ e $r_p = 24r$ para $r = 1$

Demonstração

$K = 1$	a_1^4		a_2^4		a_3^4		a_4^4		a_5^4		a_6^4		a_7^4
$K = 2$		x_1		x_2		x_3		x_4		x_5		x_6	
$K = 3$			y_1		y_2		y_3		y_4		y_5		
$K = 4$				P_1		P_2		P_3		P_4			

$$x_1 = a_2^4 - a_1^4 \qquad y_1 = x_2 - x_1$$
$$x_2 = a_3^4 - a_2^4 \qquad y_2 = x_3 - x_2$$
$$x_3 = a_4^4 - a_3^4 \qquad y_3 = x_4 - x_3$$
$$x_4 = a_5^4 - a_4^4 \qquad y_4 = x_5 - x_4$$

Substituindo os valores em x, temos:

$$y_1=(a_3^4-a_2^4)-(a_2^4-a_1^4)$$
$$y_2=(a_4^4-a_3^4)-(a_3^4-a_2^4)$$
$$y_3=(a_5^4-a_4^4)-(a_4^4-a_3^4)$$

Substituindo os valores em y, temos:

$$P_1=(a_4^4-a_3^4)-(a_3^4-a_2^4)-[(a_3^4-a_2^4)-(a_2^4-a_1^4)] \therefore P_1=a_4^4-3a_3^4+3a_2^4-a_1^4$$
$$P_2=(a_5^4-a_4^4)-(a_4^4-a_3^4)-[(a_4^4-a_3^4)-(a_3^4-a_2^4)] \therefore P_1=a_5^4-3a_4^4+3a_3^4-a_2^4$$
$$P_3=(a_6^4-a_5^4)-(a_5^4-a_4^4)-[(a_5^4-a_4^4)-(a_4^4-a_3^4)] \therefore P_1=a_6^4-3a_5^4+3a_4^4-a_3^4$$

.

.

.

$P_n=(a_{n+3}^4-a_{n+2}^4)-(a_{n+2}^4-a_{n+1}^4)-[(a_{n+2}^4-a_{n+1}^4)-(a_{n+1}^4-a_n^4)] \therefore P_n = a_{n+3}^4-3a_{n+2}^4+3a_{n+1}^4-a_n^4$.

Para termos superiores segue o mesmo raciocínio.

3. FÓRMULA GERAL DE UMA SEQUÊNCIA NUMÉRICA GERADA P_n PARA K≥1

Reescrevendo as fórmulas de cada valor de Kdos exemplos anteriores:

$$K=1 \therefore P_n=a_n$$
$$K=2 \therefore P_n=a_{n+1}^2-a_n^2$$
$$K=3 \therefore P_n=a_{n+2}^3-2a_{n+1}^3+a_n^3$$
$$K=4 \therefore P_n=a_{n+3}^4-3a_{n+2}^4+3a_{n+1}^4-a_n^4$$

Para se obter o padrão geral, basta observar os coeficientes para cada valor de K

1º coeficiente: $a_{n+(K-1)}^{K}$ $(K=1\,;K=2\,;K=3\,;K=4\,;K=5)$

2º coeficiente: $-\,(K-1)a_{n+(K-2)}^{K}$ $(K=2\,;K=3\,;K=4\,;K=5)$

3º coeficiente: $\frac{(K-1)(K-2)}{2}\,a_{n+(K-3)}^{K}$ $(K=3\,;K=4\,;K=5)$

4º coeficiente: $-\,\frac{(K-1)(K-2)(K-3)}{6}\,a_{n+(K-4)}^{K}$ $(K=4\,;K=5)$

5º coeficiente: $\frac{(K-1)(K-2)(K-3)(K-4)}{6}\,a_{n+(K-5)}^{K}$ $(K=5)$

Ao somar todos os coeficientes acima, resulta em P_n para o intervalo $1 \leq K \leq 5$:

$$P_n = a_{n+(K-1)}^{K} - (K-1)a_{n+(K-2)}^{K} + \frac{(K-1)(K-2)}{2}\,a_{n+(K-3)}^{K} - \frac{(K-1)(K-2)(K-3)}{6}\,a_{n+(K-4)}^{K} + \frac{(K-1)(K-2)(K-3)(K-4)}{24}\,a_{n+(K-5)}^{K}$$

Essa fórmula é geral apenas no intervalo $1 \leq K \leq 5$, para achar a fórmula P_n para todos os valores de K, isto é, $K \geq 1$, basta dar continuidade nos valores para $\mathrm{k} > 5$ denota-se, Y_β como todos os coeficientes β tal que $\beta = 1,2,3,\dots,k$, ou seja, segue todos os coeficientes de 1 até k:

$$Y_1 = \frac{(K-1)}{1!}$$

$$Y_2 = \frac{(K-1)(K-2)}{2!}$$

$$Y_3 = \frac{(K-1)(K-2)(K-3)}{3!}$$

$$Y_4 = \frac{(K-1)(K-2)(K-3)(K-4)}{4!}$$

$$Y_5 = \frac{(K-1)(K-2)(K-3)(K-4)(K-5)}{5!}$$

.

.

.

$$Y_\beta = \frac{\prod_{\alpha=0}^{\beta}(K-\alpha)}{K\beta!}$$

$$Y_\beta = \frac{K!}{K\beta!\,[K-(\beta+1)]!} \quad \forall\, \beta < K$$

Note também que os denominadores dos coeficientes podem ser escritos da seguinte forma:

1=1!

2=2!

6=3!

24=4!

Podemos reescrever a equação geral P_n como:

$P_n = a^K_{n+(K-1)} - Y_1 a^K_{n+(K-2)} + \frac{Y_2}{2!} a^K_{n+(K-3)} - \frac{Y_3}{3!} a^K_{n+(K-4)} + \frac{Y_4}{4!} a^K_{n+(K-5)}$ para $1 \leq K \leq 5$,

Observe também os sinais dos coeficientes alternam à medida que cresce o valor de K, portanto a fórmula geral de P_n para $K \geq 1$, fica da seguinte forma:

$$P_n = a^K_{n+(K-1)} + \sum_{\beta=1}^{K} (-1)^\beta Y_\beta \, a^K_{n+K-(\beta+1)} \qquad \forall \ K \geq 1$$

$$Y_\beta = \frac{\prod_{\alpha=0}^{\beta}(K-\alpha)}{K\beta!}$$

$$Y_\beta = \frac{K!}{K\beta! \, [K-(\beta+1)]!} \quad \forall \, \beta < K$$

3.1 RELAÇÃO ENTRE $r \ e \ r_p$

Pode-se também padronizar o valor da razão r_P de uma PA gerada com a razão r de sua PA geradora, tomando como base os exemplos anteriores para cada valor de k tem-se:

- $K = 1\,; r = 1 \;\therefore\; r_P = r$
- $K = 2$
  - $r = 1 \;\therefore\; r_P = 2 \rightarrow r_P = 2r^2$
  - $r = 2 \therefore\; r_P = \; 8 \rightarrow r_P = 2r^2$
  - $r = 3 \;\therefore\; r_P = 18 \rightarrow r_P = 2r^2$
  - $r = 4 \;\therefore\; r_P = 32 \rightarrow r_P = 2r^2$
- $K = 3$
  - $r = 1 \;\therefore\; r_P = 6 \rightarrow r_P = 6r^3$
  - $r = 2 \therefore\; r_P = \; 48 \rightarrow r_P = 6r^3$
- $K = 4$
  - $r = 1 \;\therefore\; r_P = 24 \rightarrow r_P = 24r^4$
  - $r = 2 \therefore\; r_P = \; 384 \rightarrow r_P = 24r^4$
- $K = 5$
  - $r = 1 \;\therefore\; r_P = 120 \rightarrow r_P = 120r^5$
  - $r = 2 \therefore\; r_P = \; 3840 \rightarrow r_P = 120r^5$

A relação $r \; e \; r_p$ pode ser padronizada para qualquer valor de K, sendo:

- $K = 2 \therefore r_P = 2!\, r^2$
- $K = 3 \therefore r_P = (3 \cdot 2 \cdot 1) r^3 \rightarrow r_P = 3!\, r^3$
- $K = 4 \therefore r_P = (4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) r^4 \rightarrow r_P = 4!\, r^4$
- $K = 5 \therefore r_P = (5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) r^5 \rightarrow r_P = 5!\, r^5$
- $K = 6 \therefore r_P = (6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) r^6 \rightarrow r_P = 6!\, r^6$

Portanto analisando as relações $r\ e\ r_p$ dos diferentes valores de K, tem-se a fórmula de geral de r_P :

$$r_P = K!\, r^K \qquad \forall\, K \geq 1$$

r_P é chamado de razão de uma PA gerada.

Demonstração de r_P

A demonstração da razão de uma PA gerada é feita pra indução finita. Seja r_P a razão da PA gerada tal que :

$$r_P = K!\, r^K \qquad \forall\, K \geq 1$$

Tomemos para K =1 e substituindo na expressão acima obtém-se: $r_P = 1!\,r^1 = r$, ou seja, é a própria razão da PA geradora. Hipótese de indução: assumindo que $K = \alpha$ é verdadeira para $\alpha > 0$, tem-se:

$r_P = \alpha!\,r^\alpha$ Tese de indução: assumindo que $K = \alpha + 1$é verdadeira para $\alpha > 0$, é o que segue:

$$r_P = \alpha!\,r^\alpha$$

Multiplicando os dois lados da igualdade por $r(\alpha + 1)$, obtem-se:

$$r(\alpha + 1) \cdot r_P = \alpha!\,r^\alpha \cdot r(\alpha + 1)$$
$$= (\alpha + 1)!\,r^{\alpha+1}$$

Como queríamos demonstrar ■

3.2 FÓRMULA GERAL DA PA GERADA P_n DE ORDEM K≥1 DO TIPO a_n^K

Para gerar uma Progressão Aritmética de ordem $K \geq 1$do tipo a_n^K tem que haver uma PA de razão r, em que seus termos sejam elevados ao grau ou potência K. Retomando os termos de uma PA elevado a um valor K:

$$a_1^K,\ a_2^K,\ a_3^K,a_4^K,a_5^K \ldots.a_n^K$$

Em que *an* é uma PA e Ké a ordem que se quer gerar a PA, para provar que isso é verdade toma-se como exemplo uma PA gerada para $K=1$
PA gerada para $K=11$

$$a_1^1,\ a_2^1,\ a_3^1,a_4^1,a_5^1 \ldots.a_n^1$$

Utilizando a fórmula geral e calculando para $K=1$temos:

$$P_n = a_{n+(1-1)}^1 + \sum_{\beta=1}^{1} \frac{(-1)^{1.0}}{1.1!} a_{n+1-(1+1)}^K \quad \text{e}$$

$$Y_1 = \prod_{\alpha=0}^{1} (K-\alpha) = (1-0)(1-1) = 0$$

$$P_n = a_n$$

Ou seja, a PA gerada é a própria PA inicial, observa-se que a fórmula da PA de ordem $K=1$, já é conhecida como:

$$a_n = a_1 + (n-1)r = P_n$$

PA gerada para $K=2$

Observamos anteriormente que a fórmula geral de uma sequência gerada P_n para $K = 2$ é:

$$P_n^{(2)} = a_{n+1}^2 - a_n^2$$

Para os termos $1, n = 2, n = 3$, tem-se:

$$n = 1 \therefore P_1^{(2)} = a_2^2 - a_1^2$$

$$n = 2 \therefore P_2^{(2)} = a_3^2 - a_2^2$$

$$n = 3 \therefore P_3^{(2)} = a_4^2 - a_3^2$$

Sabemos também que:

$$a_2 = a_1 + r$$

$$a_3 = a_1 + 2r$$

Substituindo os valores de $a_2 \ e \ a_3$ na equação P obtém-se a seguinte expressão:

$$P_1^{(2)} = (a_1 + r)^2 - a_1 \therefore P_1 = 2a_1r + r^2$$

$$P_2^{(2)} = (a_1 + 2r)^2 - (a_1 + r)^2 \rightarrow P_1 = a_1^2 + 4a_1r + 4r^2 - a_1^2 - 2a_1r - r^2 \therefore$$

$$P_n = 2a_1r + 3r^2$$

$$P_3^{(2)} = 2a_1r + 5r^2$$

Nota-se que o primeiro termo de cada equação se repete, variando apenas as incógnitas do segundo termo, portanto para cada termo há uma variação de um valor $\varphi_2(n)r^2$ do 2º termo, para achar o valor de $\varphi_2(n)$ observa-se:

RC: 122729
Disponível em: https://www.nucleodoconhecimento.com.br/matematica/ordem-superior

$$\varphi_2(1) = 1$$
$$\varphi_2(2) = 3$$

$\varphi_2(3) = 5$

.

.

.

$\varphi_2(n) = 2n - 1$, logo a fórmula padrão para $K = 2$ é:

$P_n^{(2)}$= $2a_1r + (2n-1)r^2$ ou ainda

$P_n^{(2)}$= $2!\,a_1r + \frac{2!(2n-1)}{2}r^2$ para $\varphi_2(n) = \frac{2n-1}{2}$, portanto

$P_n^{(2)}$= $2!\,a_1r + 2!\,\varphi_2(n)r^2$, que é a fórmula geral da PA gerada para $K = 2$

PA gerada para $K = 3$

Idem ao raciocínio anterior para obter a fórmula geral de uma sequência gerada P_n para $K = 3$é:

$$P_n^{(3)} = a_{n+2}^3 - 2a_{n+1}^3 + a_n^3$$

Calcularemos os termos $n = 1\,, n = 2$, para então estabelecermos o padrão para essa ordem.

$$n = 1 \therefore P_1^{(3)} = a_3^3 - 2a_2^3 + a_1^3$$

$$n = 2 \therefore P_2^{(3)} = a_4^3 - 2a_3^3 + a_2^3$$

observe também que:

$$a_2 = a_1 + r$$

$$a_3 = a_1 + 2r$$

$$a_4 = a_1 + 3r$$

Substituindo os valores acima na equação P tem-se a seguinte expressão:

$$P_1^{(3)} = (a_1 + 2r)^3 - 2(a_1 + r)^3 + {a_1}^3 =$$

$$= {a_1}^3 + 2r{a_1}^3 + 4r{a_1}^2 + 8a_1r^2 + 4a_1r^2 + 8r^3$$

$$- 2({a_1}^3 + r{a_1}^2 + 2r{a_1}^2 + 2a_1r^2 + a_1r^2 + r^3) + {a_1}^3 =$$

$$= {a_1}^3 + 6r{a_1}^3 + 12a_1r^2 + 8r^3 - 2{a_1}^3 - 6r{a_1}^3 - 6a_1r^2 - 2r^3$$

$$+ {a_1}^3$$

$$\therefore P_1^{(3)} = 2 = 6a_1r^2 + 6r^3,$$

Fazendo os mesmos cálculos para $P_2^{(3)}$ resulta:

$$P_2^{(3)} = (a_1 + 3r)^3 - 2(a_1 + 2r)^3 + (a_1 + r)^3$$

$$\therefore P_2^{(3)} = 6a_1 r^2 + 12r^3,$$

Há uma variação de um valor $\varphi_3(n)r^3$ no 2º termo, para acharmos o valor de $\varphi_3(n)$:

$$\varphi_3(1) = 1$$

$$\varphi_3(2) = 2$$

-
-
- $\varphi_3(n) = n$, logo a fórmula padrão para $K = 3$ é:

$P_n^{(3)}$= $3!\, a_1 r^2 + 3!\, n r^3$, ou ainda,

$P_n^{(3)}$= $3!\, a_1 r^2 + 3!\, n r^3$, para $\varphi_3(n) = n$, portanto

$P_n^{(3)}$= $3!\, a_1 r^2 + 3!\, \varphi_3(n) r^3$, que é a fórmula geral da PA gerada para $K = 3$

PA gerada para $K = 4$

$$P_n^{(4)} = a_{n+3}^4 - 3a_{n+2}^4 + 3a_{n+1}^4 - a_n^4$$

Calcula-se os termos $n = 1 \,, n = 2$, para então estabelecer o padrão para esta ordem.

$$n = 1 \therefore P_1^{(4)} = a_4^4 - 3a_3^4 + 3a_2^4 - a_1^4$$

$$n = 2 \therefore P_2^{(4)} = a_5^4 - 3a_4^4 + 3a_3^4 - a_2^4$$

Observa-se também que:

$$a_2 = a_1 + r$$

$$a_3 = a_1 + 2r$$

$$a_4 = a_1 + 3r$$

$$a_5 = a_1 + 4r$$

Substituindo os valores acima na equação P tem-se a seguinte expressão:

$$P_1^{(4)} = (a_1 + 3r)^4 - 3(a_1 + 2r)^4 + 3(a_1 + r)^4 - a_1^4$$

fazendo os mesmos cálculos para $P_2^{(3)}$, temos:

$$P_2^{(4)} = (a_1 + 4r)^4 - 3(a_1 + 3r)^4 + 3(a_1 + 2r)^4 - (a_1 + r)^4 \,,$$

Utilizando o binômio de Newton para os termos:

RC: 122729
Disponível em: https://www.nucleodoconhecimento.com.br/matematica/ordem-superior

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 \ldots . \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0 b^n = \sum_{\alpha=0}^{n} \binom{n}{\alpha} (a^{n-\alpha} b^{\alpha})$$

Aplicando em $(a_1+3r)^4; -3(a_1+2r)^4; 3(a_1+r)^4$, obtém-se:

$$(a_1+3r)^4 = a_1^4 + 12a_1^3 r + 54a_1^2 r^2 + 108a_1 r^3 + 81r^4$$
$$-3(a_1+2r)^4 = -(3a_1^4 + 24a_1^3 r + 72a_1^2 r^2 + 96a_1 r^3 + 48r^4)$$
$$+3(a_1+r)^4 = +(3a_1^4 + 12a_1^3 r + 18a_1^2 r^2 + 12a_1 r^3 + 3r^4)$$

Somando os todos os termos:

$$: \ P_1^{(4)} = (a_1+3r)^4 - 3(a_1+2r)^4 + 3(a_1+r)^4 - a_1^4 = \ a_1^4 + 12a_1^3 r + 54a_1^2 r^2 + 108a_1 r^3 + 81r^4 - (3a_1^4 + 24a_1^3 r + 72a_1^2 r^2 + 96a_1 r^3 + 48r^4) + (3a_1^4 + 12a_1^3 r + 18a_1^2 r^2 + 12a_1 r^3 + 3r^4) - a_1^4$$
$$\therefore P_1^{(4)} = 24a_1 r^3 + 36r^4.$$

Seguindo o mesmo raciocínio para $P_2^{(4)}$, tem-se:

$$P_2^{(4)} = (a_1+4r)^4 - 3(a_1+3r)^4 + 3\ a_1^4 + 16a_1^3 r + 96a_1^2 r^2 + 256a_1 r^3 + 256r^4 - (3a_1^4 + 36a_1^3 r + 162a_1^2 r^2 + 324a_1 r^3 + 243r^4) + (3a_1^4 + 24a_1^3 r + 72a_1^2 r^2 + 96a_1 r^3 + 48r^4) - (a_1^4 + 4a_1^3 r + 6a_1^2 r^2 + 4a_1 r^3 + r^4),$$ em que:

$$\therefore P_2^{(4)} = 24a_1 r^3 + 60r^4$$

De acordo com os valores apresentados para as ordens

$K = 1;\ K = 2\,; K = 3\ e\ K = 4$ observa-se que o primeiro termo sempre se repeti para qualquer ordem apresentada, havendo uma variação de um valor $\varphi_4(n)r^4$ no 2ª termo apresentando os padrões anteriores para $K = 4$, obtém-se uma formula Geral para $K \geq 1$, ou seja, basta analisar a expressão constante e a expressão variante, para então achar a formula de forma mais fácil para qualquer termo $K \geq 4$ então:

- $K = 1$

$$P_n = a_n = a_1 + (n-1)r$$

- $K = 2$

$$P_n^{(2)} = 2!\,a_1 r + \frac{2!(2n-1)}{2} r^2$$

- $K = 3$

$$P_n^{(3)} = 3!\,a_1 r^2 + 3!\,n r^2$$

Ao analisar essas equações observa-se as expressões constantes e variantes, ou seja :

1º termo da equação $K = 1 \therefore a_1$

1º termo da equação $K = 2 \therefore 2!\,a_1 r$

1º termo da equação $K = 3 \therefore 3!\,a_1 r^2$

1º termo da equação $K = 4 \therefore 4!\,a_1 r^3$, logo

1º termo da equação geral de $P_n^{(K)}$ para $K \geq 1 \therefore K!\,a_1 r^{K-1}$

Vamos analisar o 2º termo da equação, que é o termo variante :

2º termo da equação $K = 1 \therefore (n-1)r$

2º termo da equação $K = 2 \therefore \frac{2!(2n-1)}{2} r^2$

2º termo da equação $K = 3 \therefore 3!\,n r^3$

2º termo da equação $K = 4 \therefore 4!\,\varphi_4(n) r^4$

2º termo da equação geral de $P_n^{(K)}$ para $K \geq 1 \therefore K!\,\varphi_K(n) r^K$

Juntando os dois termos 1ª e 2ª tem-se a fórmula completa da PA gerada $\forall\, K \geq 1$ que é:

$$P_n^{(K)} = K!\,a_1 r^{K-1} + K!\,\varphi_K(n) r^K \text{ ou}$$

$$P_n^{(K)} = K!\,(a_1 r^{K-1} + \varphi_K(n) r^K)$$

A Fórmula acima representa qualquer PA gerada para qualquer ordem ou valor $K \geq 1$. Será possível calcular a expressão $\varphi_K(n)$ que é uma função de n para cada valor de K:

$$K = 1 \therefore \varphi_1(n) = (n-1)$$

$$K = 2 \therefore \varphi_2(n) = \frac{(2n-1)}{2}$$

$$K = 3 \therefore \varphi_3(n) = n$$

Calcula-se agora $\varphi_4(n)$ para estabelecer a fórmula geral para $K = 4$, para isso segue um exemplo:

3.2.1 EXEMPLO

Seja uma PA em que $a_1 = 1$ e $r = 1$, para acharmos uma PA de e $K = 4$, basta elevarmos a potência cada termo o valor $K = 4$, que fica:

$1^4, 2^4, 3^4, 4^4, 5^4, 6^4, 7^4, 8^4, 9^4$

Calcula-se o valor de P_1através da expressão :

$$P_1^{(4)} = a_4^4 - 3a_3^4 + 3a_2^4 - a_1^4$$

Que vem da fórmula geral de qualquer sequência numérica gerada, procura-se achar o valor de P_1para então substituir na fórmula da PA para $K = 4$, para se achar a expressão $\varphi_4(1)$:

$$P_1^{(4)} = 4^4 - 3 \cdot 3^4 + 3 \cdot 2^4 - 1^4 = 60$$

Substituindo na fórmula $P_n^{(K)} = K!\, a_1 r^{K-1} + K!\, \varphi_K(n) r^K$; tem-se:

$$P_1^{(4)} = 4!\ 1 \cdot 1^3 + 4! \cdot\ \varphi_4(1) \cdot 1^4 = 60$$

$$24 + 24x\varphi_4(1) = 60$$

$$\varphi_4(1) = \frac{60 - 24}{24} = 1{,}5 = \frac{3}{2}$$

Calcula-se agora o valor de P_2 através da expressão:

$$P_2^{(4)} = a_5^4 - 3a_4^4 + 3a_3^4 - a_2^4$$

Que vem da fórmula geral de qualquer sequência numérica gerada, obtém-se agora

RC: 122729
Disponível em: https://www.nucleodoconhecimento.com.br/matematica/ordem-superior

o valor de P_2 para então substituir na fórmula da PA para $K = 4$, para achar a expressão $\varphi_4(2)$:

$$P_2^{(4)} = 5^4 - 3 \cdot 4^4 + 3 \cdot 3^4 - 2^4 = 84$$

Substituindo na fórmula $P_n^{(K)} = K!\, a_1 r^{K-1} + K!\, \varphi_K(n) r^K$; temos:

$$P_2^{(4)} = 4! \cdot 1 \cdot 1^3 + 4! \cdot \varphi_4(2) \cdot 1^4 = 84$$

$$24 + 24 \cdot \varphi_4(2) = 84$$

$$\varphi_4(2) = \frac{84 - 24}{24} = 2{,}5 = \frac{5}{2}$$

$$\varphi_4(1) = \frac{3}{2}\,;\, \varphi_4(2) = \frac{5}{2}$$

A expressão geral de uma função da reta é $y = ax + b$, que fica da seguinte forma: $\varphi_4(n) = an + b$, tendo os pontos para encontrar a equação:

$(1; \frac{3}{2})$ e $(2; \frac{5}{2})$

Substituindo :

$$\varphi_4(1) = a \cdot 1 + b = \frac{3}{2}$$

$$\varphi_4(2) = a \cdot 2 + b = \frac{5}{2}$$

Tendo o sistema: $\begin{cases} a + b = \frac{3}{2} \\ 2a + b = \frac{5}{2} \end{cases}$

Resolvendo o sistema temos os valores de $a = 1\ e\ b = \frac{1}{2}$, obtendo a expressão $\varphi_4(n) = n + \frac{1}{2}$, tirando o m.m.c., obtém-se a seguinte expressão: $\varphi_4(n) = \dfrac{2n+1}{2}$

Essa é a expressão φpara a fórmula geral da PA $\forall\, K = 4$.

$$P_n^{(4)} = 4!\,(a_1 r^3 + \frac{2n+1}{2} r^4)$$

Dessa forma obtém-se uma fórmula geral para qualquer PA gerada $\forall\, K \geq 1$ obedecendo, a seguinte formula Geral da PA gerada por uma PA inicial elevada a potência K, que o próprio Kestabelece em qual ordem ou linha que está localizada a PA gerada.

Sendo assim a fórmula geral da PA $\forall\, K \geq 1$ é :

$$P_n^{(K)} = K!\,(a_1 r^{K-1} + \ \varphi_K(n) r^K$$

3.2 EXEMPLO

$K = 1$	1	16	81	256	625	1296	2401	4096	6561
$K = 2$		15	65	175	369	671	1105	1695	2465
$K = 3$		50	110	194	302	434	590	770	
$K = 4$			60	84	108	132	156	180	
rp			24	24	24	24	24		

Seja uma PA gerada para $K = 4$, apresenta os valores calculados acima.

$$1^4,\ 2^4,\ 3^4,\ 4^4,\ 5^4,\ 6^4,\ 7^4, 8^4,\ 9^4$$

Expressão φpara $K = 5\ ,\ \varphi_5(n)$.

Seja a PA gerada abaixo, obedecida pela fórmula da sequência gerada :

$$P_n^{(5)} = a_{n+4}^5 - 4a_{n+3}^5 + 6a_{n+2}^5 - 4a_{n+1}^5 + a_n^5$$

$$1^5,\ 3^5,\ 5^5,\ 7^5,\ 9^5,\ 11^5,\ 13^5, 15^5,\ 17^5$$

Substituindo o valor da PA na fórmula $P_n^{(K)} = K!\, a_1 r^{K-1} + K!\, \varphi_K(n) r^K$ para achar a expressão $\varphi_5(1)$ tem-se:

$$P_1^{(5)} = 5! \cdot 1 \cdot 2^4 + 5! \cdot \varphi_5(1) \cdot 2^5 = 9600$$

$$1920 + 3840x\varphi_5(1) = 9600$$

$$\varphi_5(1) = \frac{9600 - 1920}{3840} = 2$$

Substituindo na fórmula $P_n^{(K)} = K!\, a_1 r^{K-1} + K!\, \varphi_K(n) r^K$, para achar a expressão $\varphi_5(2)$ tem-se:

$$P_2^{(5)} = 5! \cdot 1 \cdot 2^4 + 5! \cdot \varphi_5(2) \cdot 2^5 = 13440$$

$$1920 + 3840 \cdot \varphi_5(2) = 13440$$

$$\varphi_5(2) = \frac{13440 - 1920}{3840} = 3$$

Para acharmos a expressão φ, basta calcular a fórmula da sequência numérica gerada e substituir na fórmula da PA gerada, a expressão φ é uma função do 1º grau, bastando apenas de 2 pontos da reta para estabelecer a função geral, ou seja

$\varphi_5(1) = 2$; $\varphi_5(2) = 3$

RC: 122729
Disponível em: https://www.nucleodoconhecimento.com.br/matematica/ordem-superior

A expressão geral de uma função da reta é $\varphi_5(1) = 2$; $\varphi_5(2) = 3$, que fica da seguinte forma: $y = ax + b$, tendo os pontos para encontrar a equação:

(1;2) e (2;3)

Substituindo :

$$\varphi_5(1) = ax1 + b = 2$$

$$\varphi_5(2) = ax2 + b = 3$$

Tendo o sistema: $\begin{cases} a + b = 2 \\ 2a + b = 3 \end{cases}$

Resolvendo o sistema temos os valores de $a = 1 \; e \; b = 1$, obtendo a expressão $\varphi_5(n) = n + 1$, obtém-se a seguinte expressão: $\varphi_5(n) = n + 1$ Essa é a expressão φ para a fórmula geral da PA $\forall K = 5$.

$$P_n^{(5)} = 5!\,[a_1 r^4 + (n+1) r^5]$$

Observação: Para achar expressão φ para qualquer valor k segue o mesmo raciocínio das expressões anteriores.
Sendo assim cada função φ representa uma PA de ordem K diferente ou seja:

- $K = 1 \therefore \varphi_1(n) = n - 1$
- $K = 2 \therefore \varphi_2(n) = \frac{2n-1}{2}$
- $K = 3 \therefore \varphi_3(n) = n$
- $K = 4 \therefore \varphi_4(n) = \frac{2n+1}{2}$
- $K = 5 \therefore \varphi_5(n) = n + 1$
- $K = 6 \therefore \varphi_6(n) = \frac{2n+3}{2}$
- $K = 7 \therefore \varphi_7(n) = n + 2$
- $K = 8 \therefore \varphi_8(n) = \frac{2n+5}{2}$
- $K = 9 \therefore \varphi_9(n) = n + 3$
- $K = 10 \therefore \varphi_{10}(n) = \frac{2n+7}{2}$

A formula padrão φ para qualquer ordem $K \geq 1$ observa-se os valores de K impares, ela é crescente e seu valor é sempre inteiro, enquanto os valores de K pares , também é crescente , mas da forma racional, portanto a formula de $\varphi_K(n)$ quando for ímpar no lado das constantes tem-se: -1,0,1,2,3..., enquanto par tem-se: -1/2, 0 , 1/2, 3/2, 5/2, 7/2 ,ou seja, múltiplos de 1/2. Se tirarmos a fração do termo n, observa-se que ela sempre somará com uma constante racional, logo a fórmula $\varphi_K(n) \ \ \forall\, K \geq 1$, é:

$$\varphi_K(n) = n + \frac{(K-3)}{2}$$

Efetuando o m.m.c. pode-se ainda escrever a equação da seguinte forma:

MULTIDISCIPLINARY SCIENTIFIC JOURNAL
NÚCLEO DO CONHECIMENTO
REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR NÚCLEO DO CONHECIMENTO ISSN: 2448-0959
https://www.nucleodoconhecimento.com.br

$$\varphi_K(n) = \frac{2n + (K-3)}{2}, \forall\, K \geq 1$$

Substituindo na fórmula de $P_n^{(K)}$ Obtém-se:

$$P_n^{(K)} = K!\,[a_1 r^{K-1} + (\tfrac{2n+(K-3)}{2}) r^K]\,, \forall\, K \geq 1$$

Essa é a fórmula completa de qualquer PA gerada a partir de uma PA inicial elevada a potência K, que K é a ordem da PA gerada.

3.2.1 – DEMONSTRAÇÃO DA FÓRMULA $P_n^{(K)}$ POR INDUÇÃO:

Seja $P_n^{(K)}$ uma PA gerada tal que: $P_n^{(K)} = K!\,[a_1 r^{K-1} + \left(\frac{2n+(K-3)}{2}\right) r^K],\ \forall n \in \mathbb{N}\ e\ K \geq 1$. Para K =1 ,

substituindo na expressão acima obtém-se: $P_n^{(1)} = 1!\,[a_1 r^{1-1} + \left(\frac{2n+(1-3)}{2}\right) r^1] = P_n^{(1)} = a_1 + (n-1)r = a_n$, que é uma PA de primeira ordem, ou a própria PA geradora. Hipótese de indução: assumindo que $K = \alpha$ é verdadeira para $\alpha > 0$, temos:

$$P_n^{(\alpha)} = \alpha!\,[a_1 r^{\alpha-1} + \left(\frac{2n+(\alpha-3)}{2}\right) r^\alpha]$$

Tese de indução: assumindo que $K = \alpha + 1$ seja verdadeira para $\alpha > 0$ é o que segue a demonstração:

Seja $P_n^{(\alpha)} = \alpha!\,[a_1 r^{\alpha-1} + \left(\frac{2n+(\alpha-3)}{2}\right) r^{\alpha}]$ somando os dois lados da igualdade por $\left(\frac{\alpha! r^{\alpha}}{2}\right)$ obtém-se: $\left(\frac{\alpha! r^{\alpha}}{2}\right) + P_n^{(\alpha)} = \alpha!\,[a_1 r^{\alpha-1} + \left(\frac{2n+(\alpha-3)}{2}\right) r^{\alpha}] + \left(\frac{\alpha! r^{\alpha}}{2}\right)$, na parte direita da igualdade. Coloca-se o $\alpha!$ e r^{α} em evidência obtendo:

$$\left(\frac{\alpha! r^{\alpha}}{2}\right) + P_n^{(\alpha)} = \alpha!\,[a_1 r^{\alpha-1} + \left(\frac{2n+(\alpha-2)}{2}\right) r^{\alpha}]$$

, em seguida multiplica-se a equação nos dois lados da igualdade por $r(\alpha+1)$, tem-se:

$$r(\alpha+1)\left(\frac{\alpha! r^{\alpha}}{2}\right) + r(\alpha+1)P_n^{(\alpha)} = \alpha!\,r(\alpha+1)[a_1 r^{\alpha-1} + \left(\frac{2n+(\alpha-2)}{2}\right) r^{\alpha}]$$

, inserindo r dentro do colchete obtém-se:

$$r(\alpha+1)\left(\frac{\alpha! r^{\alpha}}{2}\right) + r(\alpha+1)P_n^{(\alpha)} = \alpha!\,(\alpha+1)[a_1 r^{\alpha} + \left(\frac{2n+(\alpha-2)}{2}\right) r^{\alpha+1}]$$

, arrumando ainda mais a expressão fica:

$$\left(\frac{(\alpha+1)! r^{\alpha+1}}{2}\right) + r(\alpha+1)P_n^{(\alpha)} = (\alpha+1)!\,[a_1 r^{\alpha} + \left(\frac{2n+(\alpha-2)}{2}\right) r^{\alpha+1}]$$

, essa igualdade é válida pois tanto no lado esquerdo como o direito da igualdade obtém-se:

$$\left(\frac{\alpha+1)! r^{\alpha+1}}{2}\right) + r(\alpha+1)P_n^{(\alpha)} = P_n^{(\alpha+1)} = (\alpha+1)!\,[a_1 r^{\alpha} + \left(\frac{2n+(\alpha-2)}{2}\right) r^{\alpha+1}]$$

como queríamos demonstrar ■

4 – SOMA DE UMA PROGRESSÃO ARITMÉTICA GERADA DE ORDEM K

Sabe-se que a fórmula geral da soma de uma PA é :

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

A fórmula geral para a soma de uma PA gerada em função apenas da razão r da sequência geradora do tipo a_n^K, é determinada com base nos estudos citados anteriormente. Seja dado a soma da PA gerada denotada por G_n, ou seja, definida pela expressão abaixo:

$$G_n = \frac{(P_1 + P_n)n}{2}$$

Observando a expressão demonstrada anteriormente:

$$\varphi_K(n) = \frac{2n + (K - 3)}{2}, \forall\, K \geq 1$$

$$P_n^{(K)} = K!\,[a_1 r^{K-1} + (\tfrac{2n+(K-3)}{2}) r^K]\,, \forall\, K \geq 1$$

$$P_1 = K!\,[\,a_1 r^{K-1} + \left(\frac{K-1}{2}\right) r^K]$$

Substituindo na equação G_n obtém-se a seguinte expressão:

$$G_n = \frac{n[K!\left(a_1 r^{K-1} + \frac{(K-1)}{2} r^K\right) + K!\left(a_1 r^{K-1} + \frac{\left(2n + (K-3)\right)}{2} r^K\right)]}{2}$$

$$G_n = \frac{n[K!\,(\frac{2a_1 r^{K-1} + (K-1)r^K}{2}) + \ K!\,(\frac{2a_1 r^{K-1} + (2n + (K-3))r^K}{2})}{2}$$

$$G_n = \frac{n[K!\left(4a_1 r^{K-1} + \left((K-1) + 2n + (K-3)\right)r^K\right)]}{4}$$

$$G_n = \frac{n[K!\,(4a_1 r^{K-1} + (2n + 2K - 4)r^K)]}{4}$$

$$G_n = nK!\,(a_1 r^{K-1} + \frac{2(n+(K-2))r^K}{4})$$

Simplificando ainda mais a expressão obtém-se o termo geral da soma da PA gerada.

$$G_n = nK!\,(a_1 r^{K-1} + \frac{(n + (K-2))r^K}{2})$$

compactando ainda mais a expressão obtém-se:

$G_n = nK!\,(a_1 r^{K-1} + Y_K r^K)$, em que

$$Y_K = \frac{n + (K-2)}{2}$$

A fórmula acima é chamada soma de termos de uma PA gerada a partir de uma PA de razão r elevado a um grau K.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

De acordo com o trabalho a expressão matemática estabelece um padrão para todos os valores k de uma PA geradora, que tem como objetivo de gerar outra PA na linha K, e claro que a PA gerada continua sendo de grau único, ou seja, não se deve confundir ordem com grau, pois o mesmo está relacionado com potência ou expoente. No desenvolvimento deste trabalho foi possível obter uma fórmula matemática que geram progressões de uma determinada ordem k a partir de uma progressão base elevado ao grau k, este mesmo grau é que define, qual a ordem ou localização que a outra PA está sendo gerada.

REFERÊNCIAS

DIOGENES, R. J; LIMA, E. J. S. Progressões Aritméticas de Ordem Superior e Recorrências Lineares. Ciências Exatas e da Natureza, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Bento Goncalves, RS, v. 6, n. 1, p. 1-12, 3 jun. 2020. DOI: https://doi.org/10.35819/remat2020v6i1id3700. Disponível em: https://periodicos.ifrs.edu.br/index.php/REMAT/article/view/3700/2602. Acesso em: 27 de abr. 2020.

FILHO, S. F. R. Progressão Aritmética de Ordem Superior. 2020. 102 p. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Centro de Ciências Exatas e tecnológicas, Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 2020.

NOBRE, J. F. F ; ROCHA, R. A. Progressões Aritméticas de Ordem Superior. v. 5, n. 1, p. 35-48, jul./2018.

Enviado: Maio, 2022.

Aprovado: Julho, 2022.

[1] Graduação em Matemática. ORCID: 0000-0002-2301-1496.