MULTIDISCIPLINARY SCIENTIFIC JOURNAL NÚCLEO DO CONHECIMENTO
REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR NÚCLEO DO CONHECIMENTO ISSN: 2448-0959
https://www.nucleodoconhecimento.com.br

CÁLCULO DE LIMITE DE UMA FUNÇÃO SEM A UTILIZAÇÃO DE ε E δ

ARTIGO ORIGINAL

PEREIRA, Olavo de Carvalho [1]

PEREIRA, Olavo de Carvalho. **Cálculo de limite de uma função sem a utilização de ε e δ.** Revista Científica Multidisciplinar Núcleo do Conhecimento. Ano. 06, Ed. 08, Vol. 04, pp. 05-31. Agosto 2021. ISSN: 2448-0959, Link de acesso: https://www.nucleodoconhecimento.com.br/matematica/calculo-de-limite, DOI: 10.32749/nucleodoconhecimento.com.br/matematica/calculo-de-limite

RESUMO

A bibliografia consultada não apresenta, em nenhum dos casos analisados, cálculo de limite de uma função, mas apenas “mostra” que os valores apresentados como sendo o “limite” satisfazem a definição de limite de uma função expressa através de desigualdades envolvendo ϵ e δ, havendo, portanto, uma lacuna nesse tema, que o presente artigo vem preencher utilizando-se fundamentalmente do conceito de função definida, bem como pela identificação da expressão “x tende a certo número” com umaigualdade correspondente.

Palavras-Chave: limite de uma função, cálculo de limite, limites laterais, limites infinitos, limites no infinito.

1. INTRODUÇÃO

Esse artigo apresenta o “cálculo de limite de uma função” no intuito de preencher uma lacuna existente nesse assunto.

[1] Graduação, bacharelado em matemática, pela Universidade de Brasília.

A apresentação do cálculo mencionado na solução de diversos limites é o objetivo principal do artigo.

De forma suplementar, intencionamos esclarecer sobre a real necessidade de se calcular, ou não, o limite de uma função.

Também discorreremos, de uma maneira bem singela, sobre o caso em que uma função simples, definida em certo número, é contínua nesse número.

Embora a interpretação geométrica seja sempre importante, faremos aqui uma abordagem apenas algébrica do "cálculo de limite" apresentado.

1.1 CÁLCULO DE LIMITE DE UMA FUNÇÃO

A definição de limite de uma função é apresentada nos livros de matemática através de uma estimativa.

Por exemplo: Leithold (1994) apresenta a definição de limite de uma função da seguinte forma:

> Seja ***f*** uma função definida para todo número em algum intervalo aberto contendo ***a***, exceto possivelmente no próprio número ***a***. O limite de f (x) quando x tende a a será L, escrito como $\lim_{x \to a} f(x) = L,$ se a seguinte afirmativa for verdadeira:
>
> Dado ∊ > 0 qualquer, existe um δ >0, tal que, se 0 < | x - ***a*** | < δ então | f(x) - L | < ∊.
>
> A definição acima afirma que os valores de f(X) tendem a um limite L, quando (X) tende a um número ***a***, se o valor absoluto da diferença entre f(x) e L puder se tornar tão pequeno quanto desejarmos, tomando x suficientemente próximo de ***a***, mas não igual a ***a***.

Já Lezzi, Murakami e Machado (1991) assim se expressam sobre a mesma definição:

> Seja ***I*** um intervalo aberto ao qual pertence o número real ***a***. Seja f uma função definida para x ∊ ***I*** ***{a}.*** Dizemos que o limite de f(x), quando x tende a ***a***, é L, e escrevemos $\lim_{x \to a} f(x) = L,$ se para todo ∊ > 0, existir δ > 0 tal que se 0 < | x - ***a*** | < δ então | f(x) - L | < ∊.

Munem e Foulis (1982) usam a seguinte definição:

> Se f é uma função e a é um número, entende-se a notação $\lim_{x \to a} f(x) = L,$ como o limite de f(x) quando x tende a a é L, isto é, f(x) se aproxima do número L quando X se aproxima de ***a***.

Como se depreende das definições acima, é apresentado um limite (L) apenas para satisfazer a própria definição.

Não se apresenta em nenhum momento o cálculo de tal limite.

O presente artigo apresenta o "cálculo de limite" de uma função que pode ser utilizado em todos os casos em que seja necessário efetuar-se tal operação.

Vamos, então, ao argumento.

Para algumas funções, não definidas em certo número, no intuito de saber, com a máxima precisão possível, qual seria seu valor naquele número, costuma-se

fazer a avaliação das mesmas em valores próximos daquele número para o qual não estão definidas.

Exemplo: f(x) $= \frac{2x^2+x-3}{x-1} = \frac{(2x+3)(x-1)}{x-1}$ definida para todo x, exceto x = 1.

Se substituirmos o x por 1, teremos a indeterminação 0/0.

Como a função não está definida, isto é, não existe para o valor 1, avaliamos, então, seu valor próximo de 1, pois nosso objetivo é conhecer o valor da função, pelo menos, próximo de 1, uma vez que ela não existe para x = 1.

Para valores de x, diferentes de 1, maiores ou menores que 1, porém bem próximos de 1, f(x) = 2x + 3, pois $\frac{x-1}{x-1}$ será igual a 1, e terá valores próximos de 5, como veremos abaixo:

Vamos atribuir a x os valores 0 – 0,25 – 0,50 – 0,75 – 0,9 – 0,99 – 0,999 – 0,9999 – 0,99999, isto é, estamos tomando valores de x cada vez mais próximos de 1, porém menores do que 1 Os valores de f(x) encontrados são:

f(0) = 2.0 + 3 = 0 + 3 = 3.

f(0,25) = 2.(0,25) + 3 = 0,5 + 3 = 3,5.

f(0,50) = 2.(0,50) + 3 = 1 + 3 = 4.

f(0,75) = 2.(0,75) + 3 = 1,5 + 3 = 4,5.

f(0,9) = 2.(0,9) + 3 = 1,8 + 3 = 4,8.

f(0,99) = 2.(0,99) + 3 = 1,98 + 3 = 4,98.

f(0,999) = 2.(0,999) + 3 = 1,998 + 3 = 4,998.

f(0,9999) = 2.(0,9999) + 3 = 1,9998 + 3 = 4,9998.

f(0,99999) = 2.(0,99999) + 3 = 1,99998 + 3 = 4,99998.

Agora vamos atribuir a x os valores 2 – 1,75 – 1,5 – 1,25 – 1,1 – 1,01 – 1,001 – 1,0001 – 1,00001, isto é, estamos tomando valores de x cada vez mais próximos de 1, porém maiores que 1. Os valores de f(x)encontrados são:

f(2) = 2.2 + 3 = 4 + 3 = 7.

f(1,75) = 2.(1,75) + 3 = 3,50 + 3 = 6,5.

f(1,5) = 2.(1,5) + 3 = 3 + 3 = 6.

f(1,25) = 2.(1,25) + 3 = 2,5 + 3 = 5,5.

f(1,1) = 2.(1,1) + 3 = 2,2 + 3 = 5,2.

f(1,01) = 2.(1,01) + 3 = 2,02 + 3 = 5,02.

f(1,001) = 2.(1,001) + 3 = 2,002 + 3 = 5,002.

f(1,0001) = 2.(1,0001) + 3 = 2,0002 + 3 = 5,0002.

f(1,00001) = 2.(1,00001) + 3 = 2,00002 + 3 = 5,00002.

Como se observa, em ambos os casos, à medida que x se aproxima de 1, f(x) se aproxima de 5, levando-nos a crer que seja esse o limite de f(x).

Entretanto, não foi feito aqui nenhum “cálculo” de limite, mas apenas uma avaliação de f(x), quando x assume valores bem próximos de 1.

De forma que o valor 5 é “candidato” a ser o limite que, ainda, precisamos calcular.

Os autores consultados estruturam a definição de limite em termos de desigualdades a partir de exemplos como esse e assumem o valor estimado, no caso o 5, como realmente o limite da função.

A esse propósito, afirmam que $\lim_{x \to 1} f(x) = 5$, pois para qualquer ∈ > 0, não importa o quão pequeno ele seja, existe um δ > 0, tal que se 0 < | x - 1 | < δ então | f(x) - 5 | < ∈.

A definição de limite dada no início, que não possui nenhum cálculo de limite, é utilizada para “provar” que números fornecidos, sem nenhuma indicação de onde foram tirados, são limites de funções.

Evidenciaremos que a definição de limite não prova, não demonstra**,** que dado número é o limite de uma função, mas apenas “mostra” que o número fornecido é o limite.

Vamos usar um exemplo para tornar clara a diferença entre uma “mostração” e uma “demonstração”.

- Mostre que 2 é raiz da equação $x^2 - 4 = 0$.

Isto significa que, se substituirmos o x pelo 2, teremos zero como resultado da equação.

Vejamos $2^2 - 4 = 4 - 4 = 0$.

Esse foi exemplo de “mostração”, isto é, apenas se mostrou alguma coisa, não se demonstrou nada, não se calculou nada, apenas se substituiu o valor fornecido.

Diferente é quando se diz: demonstre que 2 é raiz, é solução da equação $x^2 - 4 = 0$.

Nesse caso, temos que calcular, resolver a equação, e ver se obtemos $x = 2$.

Bem, resolvendo, temos: $x^2 - 4 = 0$, logo $x^2 = 4$, e extraindo a raiz quadrada em ambos os lados temos: $|x| = 2$, isto é, $x= 2$ ou $x = -2$.

Logo um dos valores de x realmente é 2.

Com isto, ficou “demonstrado” que realmente 2 é raiz da equação $x^2 - 4 = 0$.

Veremos, nos exemplos dados a seguir, que não existe uma demonstração, mas apenas uma “mostração” de que o número fornecido é limite da função dada.

Exemplo. Use a definição de limite para “provar” que $\lim_{x \to 3}(4x - 7) = 5.$

Aqui não se fala como se chegou à conclusão de que o limite é 5, nem se diz de onde esse número foi tirado.

Abordaremos, em linhas gerais, a solução apresentada nos livros consultados:

A primeira exigência da definição é que $4x - 7$ seja definida em todo número de algum intervalo aberto contendo 3, exceto possivelmente em 3. Como $4x - 7$ está definida para todos os números reais, qualquer intervalo aberto contendo 3 irá satisfazer esse requisito. Precisamos mostrar agora que para todo $\in > 0$ existe um $\delta > 0$, tal que se $0 < | x - 3 | < \delta$ então $| (4x - 7) - 5 | < \in$ temos que $| (4x - 7) - 5 | = | 4x - 12 | = | 4(x - 3) | = 4| x - 3 |$, logo $4| x - 3| < \in$ e $| x - 3 | < \in/4$

Temos, então, | x - 3| < δ e | x - 3| < ∈/4.

Essa afirmativa indica que ∈/4 é um delta satisfatório.

Com essa escolha de δ temos o seguinte argumento: 0 < | x - 3| < δ, então 4| x - 3| <4δ, então | 4x - 12 |< 4δ, então | (4x - 7) - 5 |< 4δ , então | (4x - 7) - 5 | < ∈, pois δ = ∈/4.

Isso apenas "mostra", a partir da definição de limite, que $\lim_{x \to 3}(4x - 7) = 5.$.

Como vimos, não houve uma demonstração, mas apenas uma "mostração", uma vez que, fornecido o número 5, fizemos simplesmente a substituição dele e da função dada, na definição de limite de uma função.

Vamos a mais um exemplo: use a definição para "provar" que $\lim_{x \to 2} x^2 = 4.$.

Novamente é fornecido um número, no caso o 4, como sendo o limite, mas não se diz de onde esse número foi tirado.

Vamos à solução apresentada, em linhas gerais:

Como x^2 está definido para todos os números reais, qualquer intervalo aberto contendo 2 satisfará o primeiro requisito da definição.

Precisamos mostrar que para todo ∈ > 0, existe um δ > 0, tal queSe

0 < | x - 2 | < δ então | x^2 - 4 | < ∈

Logo 0 < | x - 2 | < δ então | x - 2 | | x + 2| < ∈

Precisamos colocar uma restrição sobre δ que nos dê uma desigualdade envolvendo | x + 2|. Tal restrição é feita para selecionarmos o intervalo aberto requerido pela definição. Escolhemos o intervalo (1,3) e isto implica que δ ≤ 1. Então 0 < | x - 2 | < δ e δ ≤ 1, então | x - 2 | < 1 então -1 < x - 2 < 1 então 3 < x + x < 5 então | x + 2 | < 5.

Agora temos $0 < | x - 2 | < \delta$ e $| x + 2| < 5$, então $| x - 2 | | x + 2| < 5\delta$.

Como nossa meta é obter $| x - 2 | | x + 2| < \in$, devemos requerer $5\delta \leq \in$. Com isto $\delta \leq \in/5$.

Usando esse δ concluímos a chamada "prova".

Como vimos acima, novamente não se provou nada, mas apenas se mostrou que o número fornecido como sendo o limite, no caso o 4, satisfaz à definição de limite.

Não houve nenhum cálculo para evidenciar que o número 4 é realmente o limite.

Faremos, a partir deste ponto, a apresentação do cálculo de limite de uma função.

Antes de apresentar o "cálculo" propriamente dito, vamos avaliar f(x) nos mesmos valores de x fornecidos acima, porém considerando-os como compostos do número 1.

Isto mostrará, em linhas gerais, o raciocínio utilizado para fazer o cálculo de limite da função.

A função é $f(x) = 2x + 3$, válida para todo $x \neq 1$.

Para $x = 0$ ou $x = 1 -1$, temos que $f(0) = f(1 -1) = 2(1 -2) + 3 = 2.1 - 2.1 + 3 = 2.1 +3 - 2.1 = f (1) -2.1 = 5 - 2 = 3$.

Para $x = 0,25$ ou $x = 1 - 0,75$, temos que $f(0,25) = f(1 - 0,75) = 2(1 - 0,75) + 3 = 2.1 - 2. (0,75) + 3 = 2.1 + 3 - 2. (0,75) = f (0,75) -2.(0,75) = 5 - 1,5 = 3,5$.

Para $x = 0,5$ ou $x = 1 - 0,5$, temos que $f(0,5) = f(1 - 0,5) = 2(1 - 0,5) + 3 = 2.1 - 2. (0,5) + 3 = 2.1 + 3 - 2. (0,5) = f (0,5) -2.(0,5) = 5 - 1 = 4$.

Para $x = 0,75$ ou $x = 1 , 0,25$, temos que $f(0,75) = f(1 - 0,25) = 2(1 - 0,25) + 3 = 2.1 - 2. (0,25) + 3 = 2.1 + 3 - 2. (0,25) = f (0,25) -2.(0,25) = 5 - 0,5 = 4,5$.

Para x = 0,9 ou x = 1 - 0,1, temos que f(0,9) = f(1 - 0,1) = 2(1 - 0,1) + 3 = 2.1 - 2. (0,1) + 3 = 2.1 + 3 - 2. (0,1) = f (0,1) -2.(0,1) = 5 - 0,2 = 4,8.

Para x = 0,99 ou x = 0,01, temos que f(0,99) = f(1 - 0,01) = 2(1 - 0,01) + 3 = 2.1 - 2. (0,01) + 3 = 2.1 + 3 - 2. (0,01) = f (0,01) -2.(0,01) = 5 - 0,02 = 4,98.

Para x = 0,999 ou x = 0,001, temos que f(0,999) = f(1 - 0,001) = 2(1 - 0,001) + 3 = 2.1 - 2. (0,001) + 3 = 2.1 + 3 - 2. (0,001) = f (0,001) -2.(0,001) = 5 - 0,002 = 4,998.

Para x = 0,9999 ou x = 0,0001, temos que f(0,9999) = f(1 - 0,0001) = 2(1 - 0,0001) + 3 = 2.1 - 2. (0,0001) + 3 = 2.1 + 3 - 2. (0,0001) = f (0,0001) -2.(0,0001) = 5 - 0,0002 = 4,9998.

Para x = 0,99999 ou x = 0,00001, temos que f(0,99999) = f(1 - 0,00001) = 2(1 - 0,00001) + 3 = 2.1 - 2. (0,00001) + 3 = 2.1 + 3 - 2. (0,00001) = f (0,00001) -2.(0,00001) = 5 - 0,00002 = 4,99998.

Testamos alguns valores de x menores que 1.

Agora faremos a avaliação de f em valores maiores que 1, porém próximos de 1.

Para x = 2 ou x = 1 + 1, temos que f(2) = f(1 + 1) = 2.(1 + 1) + 3 = 2.1 + 2.1 + 3 = 2.1 + 3 + 2.1 = f(1) + 2.1 = 5 + 2 = 7.

Para x = 1,75 ou x = 1 + 0,75, temos que f(1,75) = f(1 + 0,75) = 2.(1 + 0,75) + 3 = 2.1 + 2.(0,75) + 3 = 2.1 + 3 + 2.(0,75) = f(1) + 2.(0,75) = 5 + 1,5 = 6,5.

Para x = 1,5 ou x = 1 + 0,5, temos que f(1,5) = f(1 + 0,5) = 2.(1 + 0,5) + 3 = 2.1 + 2.(0,5) + 3 = 2.1 + 3 + 2.(0,5) = f(1) + 2.(0,5) = 5 + 1 = 6.

Para x = 1,25 ou x = 1 + 0,25, temos que f(1,25) = f(1 + 0,25) = 2(1 + 0,25) + 3 = 2.1 + 2.(0,25) + 3 = 2.1 + 3 + 2. (0,25) = f (1) + 2.(0,25) = 5 + 0,5 = 5,5.

Para x = 1,1 ou x = 1 + 0,1, temos que f(1,1) = f(1 + 0,1) = 2(1 + 0,1) + 3 = 2.1 + 2.(0,1) + 3 = 2.1 + 3 + 2. (0,1) = f (1) + 2.(0,1) = 5 + 0,2 = 5,2.

Para x = 1,01 ou x = 1 + 0,01, temos que f(1,01) = f(1 + 0,01) = 2(1 + 0,01) + 3 = 2.1 + 2.(0,01) + 3 = 2.1 + 3 + 2. (0,01) = f (1) + 2.(0,01) = 5 + 0,02 = 5,02.

Para x = 1,001 ou x = 1 + 0,001, temos que f(1,001) = f(1 + 0,001) = 2(1 + 0,001) + 3 = 2.1 + 2.(0,001) + 3 = 2.1 + 3 + 2. (0,001) = f (1) + 2.(0,001) = 5 + 0,002 = 5,002.

Para x = 1,0001 ou x = 1 + 0,0001, temos que f(1,0001) = f(1 + 0,0001) = 2(1 + 0,0001) + 3 = 2.1 + 2.(0,0001) + 3 = 2.1 + 3 + 2. (0,0001) = f (1) + 2.(0,0001) = 5 + 0,0002 = 5,0002.

Para x = 1,00001 ou x = 1 + 0,00001, temos que f(1,00001) = f(1 + 0,00001) = 2(1 + 0,00001) + 3 = 2.1 + 2.(0,00001) + 3 = 2.1 + 3 + 2. (0,00001) = f (1) + 2.(0,00001) = 5 + 0,00002 = 5,00002.

Pelo exposto acima, percebemos que, quanto mais x se aproxima de 1, tanto mais f(x) se aproxima de 5, isto é, quando x tende a 1, f(x) tende a 5.

Observamos nos cálculos acima, em todos os valores atribuídos a x, o aparecimento de uma constante [f(1) = 5] à qual se somou ou se subtraiu um valor que ia tendendo a zero, à medida que x ia se aproximando de 1.

Essa constante é, portanto, "candidata" a ser o "limite" mencionado acima, isto é, há um indicativo de que poderemos ter $\lim_{x \to 1} f(x) = 5$.

Expressaremos agora, a situação acima, de uma forma semi genérica para apresentar o "cálculo do limite" propriamente dito.

A expressão x tende a 1, representada por x → 1, é equivalente a x = 1 + φ, ou x = 1 - φ quando φ tende a zero, φ → 0, e φ > 0.

Com isto, a expressão $\lim_{x\to 1} f(x)$, substituindo x por 1 + φ ou 1 - φ é equivalente a $\lim_{1+\varphi\to 1} f(1+\varphi) = \lim_{\varphi\to 0} f(1+\varphi)$ ou $\lim_{1-\varphi\to 1} f(1-\varphi) = \lim_{\varphi\to 0} f(1-\varphi)$ isto é, $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{\varphi\to 0} f(1+\varphi)$, ou $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{\varphi\to 0} f(1-\varphi)$.

A partir da igualdade acima, é possível "calcular" o valor do limite de f(x) quando x tende a 1, pois basta calcular o valor de $\lim_{\varphi\to 0} f(1+\varphi)$, ou $\lim_{\varphi\to 0} f(1-\varphi)$.

Faremos, agora, utilizando a mesma função anterior, o cálculo para x = 1 + φ quando φ → 0.

Dessa forma, ficamos com:

$\lim_{x\to 1}(2x + 3) = \lim_{\varphi\to 0}[2(1 + \varphi) + 3] = \lim_{\varphi\to 0}(2.1 + 3 + 2\varphi) = 2.1 + 3 = 5$, pois 2.1 + 3 independe de φ, e 2φ tende a zero quando φ → 0, isto é, é tão pequeno que se aproxima de zero, tanto quanto desejarmos.

O cálculo para x = 1 - φ, isto é, $\lim_{\varphi\to 0} f(1 - \varphi)$, é análogo e produz o mesmo resultado.

Vejamos: $\lim_{x\to 1}(2x + 3) = \lim_{\varphi\to 0}[2(1 - \varphi) + 3] = \lim_{\varphi\to 0}(2.1 + 3 - 2\varphi) = 2.1 + 3 = 5$.

Calcularemos, agora, uma série de limites de funções, para exemplificar a aplicação do "cálculo" mencionado.

- Calculemos $\lim_{x\to -2}(5x + 7)^4$.

Como x → -2, podemos fazer, por exemplo, x = -2 + φ, φ > 0 e φ → 0.

Ficamos com $\lim_{x\to -2}(5x + 7)^4 = \lim_{\varphi\to 0}[5(-2 + \varphi) + 7]^4 = \lim_{\varphi\to 0}[-10 + 5\varphi + 7] = \lim_{\varphi\to 0}(-3 + 5\varphi)^4$ $= (-3)^4$ + termos em φ, φ², φ^3 e φ^4 que tendem todos a zero. Logo o resultado será $(-3)^4$ = 81.

- Calculemos $\lim_{x\to 4}\frac{x}{-7x+1}$.

Como x → 4, podemos fazer, por exemplo, x = 4 + φ, φ > 0 e φ → 0.

Ficamos com $\lim_{x\to 4}\frac{x}{-7x+1} = \lim_{\varphi\to 0}\frac{4+\varphi}{-7(4+\varphi)+1} = \lim_{\varphi\to 0}\frac{4+\varphi}{-7\varphi-27} = -\frac{4}{27}$, pois o numerador tende para 4 e o denominador tende para -27.

- Calculemos $\lim_{x\to 4}\sqrt[3]{\frac{x}{-7x+1}}$.

Como vimos acima, no final ficaremos com $\lim_{\varphi\to 0}\sqrt[3]{\frac{4+\varphi}{-7\varphi-27}} = \sqrt[3]{\frac{4}{-27}} = -\frac{\sqrt[3]{4}}{3}$.

- Calculemos $\lim_{x\to 4}$ f(x) conforme abaixo.

$$f(x) = \begin{cases} x - 3 & se\ x \neq 4 \\ 5 & se\ x = 4 \end{cases}$$

Devemos calcular $\lim_{x\to 4}$ (x - 3), pois não importa o que acontece com f(x) quando x = 4.

Como x → 4, podemos fazer, por exemplo, x = 4 + φ, φ > 0 e φ → 0.

Ficamos com $\lim_{x\to 4}(x - 3) = \lim_{\varphi\to 0}(4 + \varphi - 3) = \lim_{\varphi\to 0}(\varphi - 1) = 1$, pois φ → 0.

Seja $f(x) = \frac{(x^3-2x+4)(x-3)}{x-3}$, definida para todo x, exceto x = 3.

Consideremos x → 3 isto é, x ≠ 3, para o qual f(x) se reduz a (x^3 - 2x + 4).

- Calculemos o $\lim_{x \to 3}$ f(x). Temos que $\lim_{x \to 3}$ f(x) = $\lim_{x \to 3}$ (x^3 - 2x + 4) = $\lim_{\varphi \to 0}$ f(φ + 3) = $\lim_{\varphi \to 0}$ [$(3 + 3)^3$ - 2(3 + φ) + 4] = $\lim_{\varphi \to 0}$ (3^3 - 3.3² + φ + 3.3.φ² + φ^3 - 2.3 - 2.φ + 4) = $\lim_{\varphi \to 0}$ [(3^3 - 2.3 + 4) + (3.3² . φ + 3.3.φ² + φ^3 - 2.φ)] = 3^3 - 2.3 + 4 = 25, uma vez que, quando φ → 0, a expressão 3.3².φ + 3.3.φ² + φ^3 - 2φ tende a zero.

Então $\lim_{x \to 3} \frac{(x^3-2x+4)(x-3)}{x-3}$ = $\lim_{x \to 3}$ (x^3 - 2x + 4) = f(3) = 25.

Agora consideremos o seguinte exemplo: $f(x) = \frac{x-2}{(4x-3)(x-2)}$, definida para todo x ≠ 2, e calculemos o seu limite quando x tende a 2.

Para x ≠ 2, condição de existência da função, $f(x) = \frac{1}{4x-3}$, e quando x → 2 podemos fazer, por exemplo, x = 2 - φ, com φ → 0, φ > 0 e teremos que calcular o limite $\lim_{\varphi \to 0} f(2-\varphi) = \lim_{\varphi \to 0} \frac{1}{4(2-\varphi)-3} = \lim_{\varphi \to 0} \frac{1}{4.2-3-4\varphi}$.

Como φ → 0 a expressão 4.2 - 3 - 4φ tende a 4.2 - 3 e o limite será, então, $\frac{1}{4.2-3} = f(2) = \frac{1}{5}$.

Concluindo, ficamos com: $\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x-2}{(4x-3)(x-2)} = \lim_{x \to 2} \frac{1}{4x-3} = \lim_{\varphi \to 0} f(2-\varphi) = f(2) = \frac{1}{5}$.

Observação.

Poderíamos ter aplicado o “cálculo” diretamente sobre a função, sem antes dividir o fator comum ao numerador e ao denominador.

Vejamos

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(4x-3)(x-2)} = \lim_{\varphi\to 0}\frac{2-\varphi-2}{[4(2-\varphi)-3](2-\varphi-2)} = \lim_{\varphi\to 0}\frac{-\varphi}{(4.2-3-4\varphi)(-\varphi)} = \lim_{\varphi\to 0}\frac{1}{4.2-3-4\varphi} = \frac{1}{5}.$$

Aliás, podemos aplicar o “cálculo” diretamente sobre a função, sem antes fazer uma “preparação” sobre ela.

Daremos agora alguns exemplos de cálculo de limite envolvendo função trigonométrica e exponencial no intuito de exemplificar o consolidado acima.

Consideremos a função $f(x) = \frac{(x-\alpha)senx}{x-\alpha}$, definida para todo x, exceto x = α.

Recordando: x → α significa, por exemplo, que x = α + φ, onde φ → 0, φ > 0.

Substituindo esse valor de x na equação original acima, temos:

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{(x-\alpha)senx}{x-\alpha} = \lim_{\varphi\to 0}\frac{(\alpha+\varphi-\alpha)sen(\alpha+\varphi)}{\alpha+\varphi-\alpha} = \lim_{\varphi\to 0}\frac{\varphi sen(\alpha+\varphi)}{\varphi} = \lim_{\varphi\to 0} sen(\alpha+\varphi) =$$

$$\lim_{\varphi\to 0}(sen\alpha cos\varphi + sen\varphi cos\alpha) = sen\alpha.1 + 0.cos\alpha = sen\alpha.$$

Pois, *senα* e *cosα* são independentes de φ e o $\lim_{\varphi\to 0}$ *cos*φ = 1, enquanto o $\lim_{\varphi\to 0}$ *sen*φ = 0.

Outro exemplo: consideremos a função $f(x) = \frac{b^x(x-a)}{x-a}$, definida para todo x exceto x = *a*.

- Calculemos o $\lim_{x\to a}$ f(x)

Fazendo a substituição x → *a* por, por exemplo, x = *a*, com φ → 0, φ > 0. Temos:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{\varphi\to 0} \frac{(a+\varphi-a)b^{(a+\varphi)}}{a+\varphi-a} = \lim_{\varphi\to 0} b^{(a+\varphi)} = \lim_{\varphi\to 0}(b^a.b^\varphi) = b^a.1 = b^a$$,

pois o $\lim_{\varphi\to 0} b^\varphi$ é 1 e b^a independe de φ.

Agora vamos calcular o limite das funções dadas no início para confirmar os valores dos limites fornecidos.

- Calculemos $\lim_{x\to 3}$ (4x - 7).

Como x → 3, podemos fazer, por exemplo, x = 3 + φ, φ > 0 e φ → 0 e ficamos com $\lim_{\varphi\to 0}$ [4(3 + φ) - 7] = $\lim_{\varphi\to 0}$ (4.3 - 7 + 4φ) = 4.3 - 7 = f(3) = 5.

- Calculemos $\lim_{x\to 2}$ x²

Como x → 2, podemos fazer, por exemplo, x = 2 - φ, φ > 0 e φ → 0 e ficamos comx² $\lim_{x\to 2}$ = $\lim_{\varphi\to 0}$ (2 - φ)² = $\lim_{\varphi\to 0}$ (4 - 4φ + φ²) = f(2) = 4.

Como se depreendo dos "cálculos" acima, os limites fornecidos nos exemplos anteriores estavam corretos.

Vamos demonstrar apenas um teorema sobre limites para exemplificar o cálculo aqui exposto.

Teorema. Se m e b forem constantes quaisquer, então $\lim_{x\to a}$ (mx + b) = ma + b.

Basta calcular o limite fazendo, por exemplo, x = 1 + φ, φ > 0 e φ → 0.

Ficamos com: $\lim_{x\to a}$ (mx + b) = $\lim_{\varphi\to 0}$ [m(a + φ) + b] = $\lim_{\varphi\to 0}$ (ma + b + mφ) = ma + b, pois mφ tende para zero, uma vez que φ tende para zero.

Nota-se uma simplicidade imensa no “cálculo” apresentado.

Nesse caso não resta dúvida de que o limite é f(a).

Agora utilizaremos o “cálculo de limite” apresentado para calcular limites de funções em diversas circunstâncias.

- Calculemos $\lim_{x \to 2} \sqrt{\frac{x^2+2x+3}{x^2+5}}$.

Como x → 2, então podemos fazer, por exemplo, x = 2 + φ, φ > 0 e φ → 0.

Ficamos com

$$\lim_{x \to 2} \sqrt{\frac{x^2+2x+3}{x^2+5}} = \lim_{\varphi \to 0} \sqrt{\frac{(2+\varphi)^2+2(2+\varphi)+3}{(2+\varphi)^2+5}} = \lim_{\varphi \to 0} \sqrt{\frac{\varphi^2+4\varphi+4+4+2\varphi+3}{\varphi^2+4\varphi+4+5}} = \lim_{\varphi \to 0} \sqrt{\frac{\varphi^2+6\varphi+11}{\varphi^2+4\varphi+9}} = \frac{\sqrt{11}}{3} =$$

f(2), uma vez que $\varphi^2 + 6\varphi + 11$ tende para 11 e $\varphi^2 + 4\varphi + 9$ tende para 9.

- Calculemos $\lim_{x \to 5} [\frac{x^2-25}{x-5}]$.

Como x → 5, então podemos fazer, por exemplo, x = 5 + φ, φ > 0 e φ → 0.

Ficamos
com

$$\lim_{x \to 5} [\frac{x^2-25}{x-5}] = \lim_{\varphi \to 0} [\frac{(5+\varphi)^2-25}{5+\varphi-5}] = \lim_{\varphi \to 0} \frac{(\varphi^2+10\varphi+25-25)}{\varphi} = \lim_{\varphi \to 0} \frac{(\varphi^2+10\varphi)}{\varphi} = \lim_{\varphi \to 0} (\varphi + 10) = 10$$

Observa-se que não foi necessário “preparar” a função para aplicar o “cálculo”, isto é, não foi necessário escrever a função como $\frac{(x-5)(x+5)}{x-5}$ e, finalmente, como x + 5.

- Calculemos $\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$.

Nos casos envolvendo radicais, ao qual estão somados ou subtraídos um número real, quando a substituição direta do valor de conduz à indeterminação 0/0, temos que preparar a equação, pois a aplicação direta do “cálculo” não desfaz a indeterminação, como veremos abaixo.

O que ocorre nesse caso é que existe um fator comum ao numerador e ao denominador, mas que só é expresso quando efetuamos a divisão, seja do numerador pelo denominador, seja do denominador pelo numerador.

Isso se traduz atualmente em matemática como racionalização.

Vejamos no exemplo acima: se dividirmos o denominador pelo numerador, uma vez que o expoente de x no denominador é 1 e o expoente de x no numerador é menor, isto é, vale 1/2, teremos: $\frac{x-4}{\sqrt{x}-2} = \sqrt{x} + 2$ e substituindo, ficaremos com $\frac{\sqrt{x}-2}{x-4} = \frac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}$.

Conseguimos, com isso, expressar o fator comum ao numerador e ao denominador.

A outra maneira é dividirmos o numerador pelo denominador, mas, nesse caso, devemos fazer mesmo é a racionalização, uma vez que o expoente de x no numerador é menor que o expoente de x no denominador, necessitando, por isso, de ser multiplicado por um fator em x para tornar o seu expoente, pelo menos, igual ao expoente do denominador.

Essa é a famosa racionalização que fazemos.

Faremos primeiro o cálculo, sem preparação.

Como $x \to 4$, podemos fazer, por exemplo, $x = 4 + \varphi$, $\varphi > 0$ e $\varphi \to 0$.

Ficamos com $\lim\limits_{x\to4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\lim\limits_{\varphi\to0}\frac{\sqrt{4+\varphi}-2}{4+\varphi-4}=\lim\limits_{\varphi\to0}\frac{\sqrt{4+\varphi}-2}{\varphi}$. Observamos a necessidade de racionalizar, pois o limite ainda fica indeterminado quando φ → 0 no numerador e no denominador, tendendo para 0/0.

Multiplicaremos e dividiremos, então, por $\sqrt{4+\varphi}+2$, e ficaremos com $\lim\limits_{\varphi\to0}\frac{(\sqrt{4+\varphi}-2)}{\varphi}\cdot\frac{(\sqrt{4+\varphi}+2)}{(\sqrt{4+\varphi}+2)}=\lim\limits_{\varphi\to0}\frac{4+\varphi-4}{\varphi(\sqrt{4+\varphi}+2)}=\lim\limits_{\varphi\to0}\frac{\varphi}{\varphi(\sqrt{4+\varphi}+2)}=\lim\limits_{\varphi\to0}\frac{1}{\sqrt{4+\varphi}+2}=\frac{1}{4}$.

Agora faremos o cálculo, preparando a função antes de aplicá-lo.

$$\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}.$$

Como a substituição direta de 4 conduz à indeterminação 0/0, significa que o numerador e o denominador têm como fator comum √x - 2 ou x - 4.

Nesse caso, como se trata de um radical menos um número real, a maneira utilizada para “liberar” o fator comum é através de racionalização.

Antes de calcular o limite, multiplicaremos e dividiremos o numerador o denominador da função por √x + 2.

Ficamos com $\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}\cdot\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}=\frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}$. Nessa função, já podemos aplicar o cálculo. Vejamos: $\lim\limits_{x\to4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\lim\limits_{x\to4}\frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}$.

Como x → 4, podemos fazer, por exemplo, x = 4 + φ, φ > 0 e φ → 0.

Ficamos com $\lim\limits_{x\to4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\lim\limits_{x\to4}\frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}=\lim\limits_{\varphi\to0}\frac{4+\varphi-4}{(4+\varphi-4)(\sqrt{4+\varphi}+2)}=\lim\limits_{\varphi\to0}\frac{\varphi}{\varphi(\sqrt{4+\varphi}+2)}=\lim\limits_{\varphi\to0}\frac{1}{\sqrt{4+\varphi}+2}=\frac{1}{4}$.

1.2 LIMITES LATERAIS

Nos casos em que uma função está definida para todo número real, exceto um número real *a*, quando calculamos seu limite com a variável independente tendendo a *a*, como nos exemplos dados acima, tanto faz utilizarmos quanto $x = a - \varphi$, $\varphi > 0$ e $\varphi \to 0$, uma vez que ela está definida para todos os números à esquerda e à direita de *a*.

E é claro, não se tratando de uma função sentença.

Quando uma função não está definida à esquerda ou à direta de um número e tenhamos que calcular seu limite com tendendo a devemos utilizar o valor de conforme o caso.

Quando $x \to a$ e fazemos ou $x = a + \varphi$, ou $x = a - \varphi$, $\varphi > 0$ e $\varphi \to 0$, então $a + \varphi$ indica que x está se aproximando de *a* por valores maiores que *a*, e, portanto, está se aproximando de *a* pela direita.

O cálculo feito com $x = a + \varphi$ é, portanto, o limite quando x tende a *a* pela direita.

É, por isso, o limite lateral direito.

Utilizamos $x = a - \varphi$ para calcular o limite lateral esquerdo.

Sabemos que o limite existe somente quando os limites laterais existem e são iguais.

- Calculemos $\lim_{x \to 4} \sqrt{x - 4}$.

Sabemos que a função existe somente para $x - 4 \geq 0$, isto é, $x \geq 4$.

Logo, não existe o limite lateral esquerdo e, com isto, não existe o limite em questão.

Mas existe o limite lateral direito que pode ser calculado substituindo x por $4 + \varphi$, $\varphi > 0$ e $\varphi \to 0$.

$$\lim_{x \to 4^+} \sqrt{x - 4} = \lim_{\varphi \to 0} \sqrt{4 + \varphi - 4} = \lim_{\varphi \to 0} \sqrt{\varphi} = 0.$$

Seja $h(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & se \quad x \leq 1 \\ 2 + x^2 & se \quad x > 1 \end{cases}$

- Calculemos os limites laterais.

$\lim\limits_{x \to 1^+}$ h(x) = $\lim\limits_{x \to 1^+}$ (2 + x²) = $\lim\limits_{\varphi \to 0}$ [2 + (1 + φ)²] = $\lim\limits_{\varphi \to 0}$ (2 + 1 + 2φ + φ²) = $\lim\limits_{\varphi \to 0}$ (3 + 2φ + φ²) = 3.

$\lim\limits_{x \to 1^-}$ h(x) = $\lim\limits_{x \to 1^-}$ (4 - x²) = $\lim\limits_{\varphi \to 0}$ [4 - (1 - φ)²] = $\lim\limits_{\varphi \to 0}$ (4 - 1 - 2φ - φ²) = $\lim\limits_{\varphi \to 0}$ (3 + 2φ - φ²) = 3.

Como são iguais, $\lim\limits_{x \to 1}$ h(x) = 3.

No cálculo acima, fizemos x = 1 + φ, para calcular o limite lateral direito e x = 1 - φ para calcular o limite lateral esquerdo.

Calculemos o limite de definida por

$$f(x) = \begin{cases} x + 5 & se\ x < -3 \\ \sqrt{9 - x^2} & se\ -3 \leq x \leq 3. \\ 3 - x & se\ x > 3 \end{cases}$$

- Calculemos $\lim\limits_{x \to -3^-}$ f(x).

Devemos calcular, então, $\lim\limits_{x \to -3^-}$ (x + 5).

Faremos, então, x = -3 - φ, φ > 0 e φ → 0.

Ficamos com $\lim\limits_{x \to -3^-}$ (x + 5) = $\lim\limits_{\varphi \to 0}$ (-3 - φ +5) = $\lim\limits_{\varphi \to 0}$ (2 - φ) = 2.

- Calculemos $\lim_{x \to -3^+}$ f(x).

Devemos calcular, então, $\lim_{x \to -3^+} \sqrt{9 - x^2}$.

Faremos, então, x = - 3 + φ, φ > 0 e φ → 0.

Ficamos com $\lim_{x \to -3^+} \sqrt{9 - x^2} = \lim_{\varphi \to 0} \sqrt{9 - (-3 + \varphi)^2} = \lim_{\varphi \to 0} \sqrt{9 - 9 + 6\varphi - \varphi^2} = \lim_{\varphi \to 0} \sqrt{6\varphi - \varphi^2} = 0$

- Calculemos $\lim_{x \to -3}$ f(x).

Como $\lim_{x \to -3^-} f(x) \neq \lim_{x \to -3^+} f(x)$ então o $\lim_{x \to -3} f(x)$ não existe.

- Calculemos $\lim_{x \to 3^+}$ f(x).

Devemos calcular, então, $\lim_{x \to 3^+} (3 - x)$.

Faremos, então, x = 3 + φ, φ > 0 e φ → 0.

Ficamos com $\lim_{x \to 3^+} (3 - x) = \lim_{\varphi \to 0} [3 - (3 + \varphi)] = \lim_{\varphi \to 0} (-\varphi) = 0$.

- Calculemos $\lim_{x \to 3}$ f(x).

Como $\lim_{x \to -3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^+} f(x) = 0$, então $\lim_{x \to 3} f(x)$ existe e é igual a zero.

1.3 LIMITES INFINITOS

Aqueles cujos valores funcionais aumentam ou diminuem sem limitação, quando a variável independente se aproxima cada vez mais de um número fixo, podem ser resolvidos igualmente pelo “cálculo” de limite aqui apresentado, com a vantagem de não precisar se preocupar com teoremas.

Antes de aplicar o “cálculo”, relembremos as seguintes situações:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty,\quad \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty,\quad \lim_{x\to 0^+}\frac{-1}{x}=-\infty,\quad \lim_{x\to 0^-}\frac{-1}{x}=+\infty$$

- Calculemos o seguinte limite $\lim_{x\to 2^+}\frac{3}{(x-2)^2}$.

Como x → 2⁺, devemos fazer x = 2 + φ, φ > 0 e φ → 0.

Ficamos com $\lim_{x\to 2^+}\frac{3}{(x-2)^2}=\lim_{\varphi\to 0}\frac{3}{(2+\varphi-2)^2}=\lim_{\varphi\to 0}\frac{3}{\varphi^2}=+\infty$.

- Calculemos agora $\lim_{x\to 2^-}\frac{3}{(x-2)^2}$.

Como x → 2^-, devemos fazer x = 2 - φ, φ > 0 e φ → 0.

Ficamos com $\lim_{x\to 2^-}\frac{3}{(x-2)^2}=\lim_{\varphi\to 0}\frac{3}{(2-\varphi-2)^2}=\lim_{\varphi\to 0}\frac{3}{(-\varphi)^2}=\lim_{\varphi\to 0}\frac{3}{\varphi^2}=+\infty$.

- Calculemos $\lim_{x\to 1^+}\frac{2x}{x-1}$.

Como x → 1^+, devemos fazer x = 1 + φ, φ > 0 e φ → 0.

Ficamos com $\lim_{x\to 1^+}\frac{2x}{x-1}=\lim_{\varphi\to 0}\frac{2(1+\varphi)}{1+\varphi-1}=\lim_{\varphi\to 0}\frac{2+2\varphi}{\varphi}=+\infty$, pois o numerador tende a 2, enquanto o denominador tende a zero através de valores positivos.

- Calculemos agora $\lim_{x\to 1^-}\frac{2x}{x-1}$.

Como x → 3^+, devemos fazer x = 3 + φ, φ > 0 e φ → 0.

Ficamos
com

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{x^2+x+2}{x^2-2x-3}=\lim_{\varphi\to 0}\frac{(3+\varphi)^2+(3+\varphi)+2}{(3+\varphi)^2-2(3+\varphi)-3}=\lim_{\varphi\to 0}\frac{9+6\varphi+\varphi^2+\varphi+5}{9+6\varphi+\varphi^2-2\varphi-9}=\lim_{\varphi\to 0}\frac{\varphi^2+7\varphi+14}{\varphi^2+4\varphi}=+\infty$$

, pois o numerador tende a 14 e o denominador tende a zero através de valores negativos.

- Calculemos agora $\lim_{x\to 3^-}\frac{x^2+x+2}{x^2-2x-3}$.

Como x → 3^-, devemos fazer x = 3 - φ, φ > 0 e φ → 0.

Ficamos
com

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{x^2+x+2}{x^2-2x-3}=\lim_{\varphi\to 0}\frac{(3-\varphi)^2+(3-\varphi)+2}{(3-\varphi)^2-2(3-\varphi)-3}=\lim_{\varphi\to 0}\frac{9-6\varphi+\varphi^2-\varphi+5}{9-6\varphi+\varphi^2+2\varphi-9}=\lim_{\varphi\to 0}\frac{\varphi^2-7\varphi+14}{\varphi^2-4\varphi}=-\infty,$$

pois o numerador tende para 14, enquanto o denominador tende a zero por valores negativos, uma vez que φ tende a zero sempre por valores positivos.

Neste caso o denominador é $\varphi^2 - 4\varphi \leq 0$ sempre que φ ≤ 4, e como φ → 0, o denominador é sempre negativo.

- Calculemos $\lim_{x\to 2^+}\frac{\sqrt{x^2-4}}{x-2}$.

Como x → 2^+, devemos fazer x = 2 + φ, φ > 0 e φ → 0.

Ficamos
como

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{\sqrt{x^2-4}}{x-2}=\lim_{\varphi\to 0}\frac{\sqrt{(2+\varphi)^2-4}}{2+\varphi-2}=\lim_{\varphi\to 0}\frac{\sqrt{4+4\varphi+\varphi^2-4}}{\varphi}=\lim_{\varphi\to 0}\frac{\sqrt{4\varphi+\varphi^2}}{\varphi}=\lim_{\varphi\to 0}\sqrt{\frac{4\varphi+\varphi^2}{\varphi^2}}=\lim_{\varphi\to 0}\sqrt{\frac{4+\varphi}{\varphi}}=+\infty,$$

pois o numerador tende para 2 e o denominador tende para zero por valores positivos.

- Calculemos $\lim_{x \to 2^-} \frac{\sqrt{4-x^2}}{x-2}$

Como x → 2⁻, devemos fazer x = 2 - φ, φ > 0 e φ → 0.

Ficamos
com

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{\sqrt{4-x^2}}{x-2} = \lim_{\varphi \to 0} \frac{\sqrt{4-(2-\varphi)^2}}{2-\varphi-2} = \lim_{\varphi \to 0} \frac{\sqrt{4-4+4\varphi-\varphi^2}}{-\varphi} = \lim_{\varphi \to 0} \frac{\sqrt{4\varphi-\varphi^2}}{-\varphi} = \lim_{\varphi \to 0} -\sqrt{\frac{4\varphi-\varphi^2}{\varphi^2}} =$$

$$\lim_{\varphi \to 0} -\sqrt{\frac{4-\varphi}{\varphi}} = -\infty,$$

, pois o numerador tende para -2 e o denominador tende para zero por valores positivos.

Nesses dois casos pudemos passar o φ para dentro do radical porque ele é sempre positivo.

- Calculemos $\lim_{x \to 2^+} [\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2}]$.

Como x → 2⁺, devemos fazer x = 2 + φ, φ > 0 e φ → 0.

Ficamos com

$$\lim_{x \to 2^+} [\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2}] = \lim_{x \to 2^+} \frac{2x}{x^2-4} = \lim_{\varphi \to 0} \frac{2(2+\varphi)}{(2+\varphi)^2-4} = \lim_{\varphi \to 0} \frac{4+2\varphi}{4\varphi+\varphi^2} = +\infty,$$

pois o numerador tende para 4, enquanto o denominador tende para zero por valores positivos.

Obs. Poderíamos ter substituído diretamente o valor de x = 2 + φ na equação original.

- Calculemos $\lim_{x \to 3} [\frac{5}{(x-3)^2} \cdot \frac{x+4}{x-4}]$.

Como x → 3, devemos fazer x = 3 + φ, φ > 0 e φ → 0.

Ficamos

com $\lim_{x\to 3}[\frac{5}{(x-3)^2}.\frac{x+4}{x-4}] = \lim_{\varphi\to 0}[\frac{5}{(3+\varphi-3)^2}.\frac{3+\varphi+4}{3+\varphi-4}] = \lim_{\varphi\to 0}[\frac{5}{\varphi^2}.\frac{\varphi+7}{\varphi-1}] = \lim_{\varphi\to 0}\frac{5\varphi+35}{\varphi^3-\varphi^2} = -\infty,$

, pois o numerador tende para 35, enquanto o denominador tende para zero por valores negativos, uma vez que $\varphi^3 - \varphi^2$ é negativo para $0 < \varphi < 1$.

- Calculemos $\lim_{x\to 2^-}[\frac{\sqrt{4-x^2}}{x-2}.\frac{x-3}{x+2}]$.

Como $x \to 2^-$, faremos $x = 2 - \varphi$, $\varphi > 0$ e $\varphi \to 0$.

Ficamos

$$\lim_{x\to 2^-}[\frac{\sqrt{4-x^2}}{x-2}.\frac{x-3}{x+2}] = \lim_{\varphi\to 0}[\frac{\sqrt{4-(2-\varphi)^2}}{2-\varphi-2}.\frac{2-\varphi-3}{2-\varphi+2}] = \lim_{\varphi\to 0}[\frac{\sqrt{4\varphi-\varphi^2}}{-\varphi}.\frac{-\varphi-1}{-\varphi+4}] =$$

com $\lim_{\varphi\to 0}[-\sqrt{\frac{4\varphi-\varphi^2}{\varphi^2}}.\frac{-\varphi-1}{-\varphi+4}] = \lim_{\varphi\to 0}[-\sqrt{\frac{4-\varphi}{\varphi}}.\frac{-\varphi-1}{-\varphi+4}] = +\infty,$, pois o numerador tende para (-2).(-1) = 2 e o denominador tende para 0.4 = 0 por valores positivos.

1.4 LIMITES NO INFINITO

Da mesma forma que para os limites mencionados até aqui, a literatura consultada também não apresenta cálculo de limites no infinito, mas apenas faz uma avaliação da função quando a variável independente cresce ou decresce indefinidamente.

O resultado da avaliação é utilizado como sendo o limite.

Vejamos.

Dada a função $f(x) = \frac{2x^2}{x^2+1}$, atribuímos a x os valores 0 - 1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 10 - 100 - 1000 e assim por diante, permitindo que aumente indefinidamente. Os valores funcionais correspondentes serão 0 - 1 - 1,6 - 1,8 - 1,882353 - 1,923077 - 1,980198 - 1,999800 - 1,999998.

Observamos que, quando x cresce, tomando valores positivos, os valores funcionais aproximam-se de 2.

Quando uma variável independente x cresce indefinidamente, através de valores positivos, escrevemos “x → + ∞”.

Do exemplo dado, foi tirada a conclusão de que $\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2}{x^2+1} = 2.$

Conforme visto acima, do exemplo dado, não foi apresentado nenhum cálculo de limite da função, mas apenas se observou que, à medida que x aumentava, por valores positivos, a função se aproximava de 2.

Esse valor 2 foi, então, utilizado como sendo o limite da função.

Apresentaremos, abaixo, o “cálculo” de limite de funções quando a variável independente tende a +∞ ou a -∞.

Nos casos em que x → + ∞, faremos x = $\frac{1}{\varphi}$, φ > 0 e φ → 0, pois, como vimos acima, quando φ tende a zero por valores positivos, $\frac{1}{\varphi}$, tende a + ∞, e, com isso, x tende a + ∞.

Nos casos em que x → - ∞, faremos x = $\frac{-1}{\varphi}$; φ > 0 e φ → 0, pois, como vimos acima, quando φ tende a zero por valores positivos, $\frac{-1}{\varphi}$; tende a - ∞, e, com isso, x tende a - ∞.

- Calculemos $\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2}{x^2+300}$.

Como x → + ∞, faremos x = $\frac{1}{\varphi}$, φ > 0 e φ → 0.

Ficamos com $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x^2+300}=\lim_{\varphi\to0}\frac{2(\frac{1}{\varphi})^2}{(\frac{1}{\varphi})^2+300}=\lim_{\varphi\to0}\frac{\frac{2}{\varphi^2}}{\frac{1+300\varphi^2}{\varphi^2}}=\lim_{\varphi\to0}\frac{2}{1+300\varphi^2}=2,$ pois o numerador tende para 2 e denominador tende para 1.

- Calculemos $\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2}{x^2+300}$.

Como x → - ∞, faremos x = $\frac{-1}{\varphi}$; φ > 0 e φ → 0.

Ficamos com $\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2}{x^2+300}=\lim_{\varphi\to0}\frac{2(\frac{-1}{\varphi})^2}{(\frac{-1}{\varphi})^2+300}=\lim_{\varphi\to0}\frac{\frac{2}{\varphi^2}}{\frac{1+300\varphi^2}{\varphi^2}}=\lim_{\varphi\to0}\frac{2}{1+300\varphi^2}=2,$, pois o numerador tende para 2 e o denominador tende para 1.

- Calculemos $\lim_{x\to+\infty}\frac{4x-3}{2x+5}$.

Como x → + ∞, faremos x = $\frac{1}{\varphi}$, φ > 0 e φ → 0.

Ficamos com $\lim_{x\to+\infty}\frac{4x-3}{2x+5}=\lim_{\varphi\to0}\frac{4\left(\frac{1}{\varphi}\right)-3}{2\left(\frac{1}{\varphi}\right)+5}=\lim_{\varphi\to0}\frac{\frac{4-3\varphi}{\varphi}}{\frac{2+5\varphi}{\varphi}}=\lim_{\varphi\to0}\frac{4-3\varphi}{2+5\varphi}=2,$, pois o numerador tende para 4 e o denominador tende para 2.

- Calculemos $\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2-x+5}{4x^3-1}$.

Como x → - ∞, faremos x = $\frac{-1}{\varphi}$; φ > 0 e φ → 0.

Ficamos com $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^2-x+5}{4x^3-1}=\lim\limits_{\varphi\to0}\frac{2(\frac{-1}{\varphi})^2-(\frac{-1}{\varphi})+5}{4(\frac{-1}{\varphi})^3-1}=\lim\limits_{\varphi\to0}\frac{\frac{2}{\varphi^2}+\frac{1}{\varphi}+5}{\frac{-4}{\varphi^3}-1}=\lim\limits_{\varphi\to0}\frac{\frac{2+\varphi+5\varphi^2}{\varphi^2}}{\frac{-4-\varphi^3}{\varphi^3}}=\lim\limits_{\varphi\to0}\frac{\varphi(2+\varphi+5\varphi^2)}{-4-\varphi^3}=0,$ pois o numerador tende a zero e o denominador tende a -4.

- Calculemos $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x+4}{\sqrt{2x^2-5}}.$

Como x → + ∞, faremos x = $\frac{1}{\varphi}$, φ > 0 e φ → 0.

Ficamos com $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x+4}{\sqrt{2x^2-5}}=\lim\limits_{\varphi\to0}\frac{3\left(\frac{1}{\varphi}\right)+4}{\sqrt{2(\frac{1}{\varphi})^2-5}}=\lim\limits_{\varphi\to0}\frac{\frac{3+4\varphi}{\varphi}}{\sqrt{\frac{2-5\varphi^2}{\varphi^2}}}=\lim\limits_{\varphi\to0}\frac{\frac{3+4\varphi}{\varphi}}{\frac{\sqrt{2-5\varphi^2}}{\varphi}}=\lim\limits_{\varphi\to0}\frac{3+4\varphi}{\sqrt{2-5\varphi^2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}$, pois o numerador tende para 3 e o denominador tende para √2.

- Calculemos $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x+4}{\sqrt{2x^2-5}}.$

Como x → - ∞, faremos x = $\frac{-1}{\varphi}$, φ > 0 e φ → 0.

Ficamos com $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x+4}{\sqrt{2x^2-5}}=\lim\limits_{\varphi\to0}\frac{3\left(\frac{-1}{\varphi}\right)+4}{\sqrt{2(\frac{-1}{\varphi})^2-5}}=\lim\limits_{\varphi\to0}\frac{\frac{-3+4\varphi}{\varphi}}{\sqrt{\frac{2-5\varphi^2}{\varphi^2}}}=\lim\limits_{\varphi\to0}\frac{\frac{-3+4\varphi}{\varphi}}{\frac{\sqrt{2-5\varphi^2}}{\varphi}}=\lim\limits_{\varphi\to0}\frac{-3+4\varphi}{\sqrt{2-5\varphi^2}}=\frac{-3}{\sqrt{2}},$, pois o numerador tende para -3 e o denominador tende para √2.

- Calculemos $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x+1}.$

MULTIDISCIPLINARY SCIENTIFIC JOURNAL NÚCLEO DO CONHECIMENTO
REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR NÚCLEO DO CONHECIMENTO ISSN: 2448-0959
https://www.nucleodoconhecimento.com.br

Como x → + ∞, faremos x = $\frac{1}{\varphi}$, φ > 0 e φ → 0.

Ficamos com $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x+1}=\lim_{\varphi\to 0}\frac{\left(\frac{1}{\varphi}\right)^2}{\frac{1}{\varphi}+1}=\lim_{\varphi\to 0}\frac{\frac{1}{\varphi^2}}{\frac{1+\varphi}{\varphi}}=\lim_{\varphi\to 0}\frac{\varphi}{\varphi^2(1+\varphi)}=\lim_{\varphi\to 0}\frac{1}{\varphi(1+\varphi)}=+\infty,$

pois o numerador é 1 e o denominador tende a zero por valores positivos.

- Calculemos $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-x^2}{3x+5}.$

Como x → + ∞, faremos x = $\frac{1}{\varphi}$, φ > 0 e φ → 0.

Ficamos

com

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-x^2}{3x+5}=\lim_{\varphi\to 0}\frac{2\left(\frac{1}{\varphi}\right)-\left(\frac{1}{\varphi}\right)^2}{3\left(\frac{1}{\varphi}\right)+5}=\lim_{\varphi\to 0}\frac{\frac{2}{\varphi}-\frac{1}{\varphi^2}}{\frac{3}{\varphi}+5}=\lim_{\varphi\to 0}\frac{\frac{2\varphi-1}{\varphi^2}}{\frac{3+5\varphi}{\varphi}}=\lim_{\varphi\to 0}\frac{\varphi(2\varphi-1)}{\varphi^2(3+5\varphi)}=\lim_{\varphi\to 0}\frac{2\varphi-1}{\varphi(3+5\varphi)}=-\infty,$$

pois o numerador tende para -1 e o denominador tende para zero por valores positivos.

- Calculemos $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$

Como x → + ∞, faremos x = $\frac{1}{\varphi}$, φ > 0 e φ → 0.

Ficamos

com $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{\varphi\to 0}\frac{\frac{1}{\varphi}}{\sqrt{\left(\frac{1}{\varphi}\right)^2+1}}=\lim_{\varphi\to 0}\frac{\frac{1}{\varphi}}{\sqrt{\frac{1+\varphi^2}{\varphi^2}}}=\lim_{\varphi\to 0}\frac{\frac{1}{\varphi}}{\frac{\sqrt{1+\varphi^2}}{\varphi}}=\lim_{\varphi\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+\varphi^2}}=1,$ pois o numerador é 1 e o denominador tende para 1.

- Calculemos agora $\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$

MULTIDISCIPLINARY SCIENTIFIC JOURNAL NÚCLEO DO CONHECIMENTO
REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR NÚCLEO DO CONHECIMENTO ISSN: 2448-0959
https://www.nucleodoconhecimento.com.br

Como x → - ∞, faremos x = $\frac{-1}{\varphi}$; φ > 0 e φ → 0.

Ficamos

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{\varphi\to0}\frac{\frac{-1}{\varphi}}{\sqrt{(\frac{-1}{\varphi})^2+1}}=\lim_{\varphi\to0}\frac{\frac{-1}{\varphi}}{\sqrt{\frac{1+\varphi^2}{\varphi^2}}}=\lim_{\varphi\to0}\frac{\frac{-1}{\varphi}}{\frac{\sqrt{1+\varphi^2}}{\varphi}}=\lim_{\varphi\to0}\frac{-1}{\sqrt{1+\varphi^2}}=-1$$

com

, pois o numerador é -1 e o denominador tende para 1.

- Calculemos $\lim_{x\to2^+}2\sqrt{\frac{x}{x-2}}$.

Como x → 2⁺, devemos fazer x = 2 + φ, φ > 0, φ → 0.

Ficamos com $\lim_{x\to2^+}2\sqrt{\frac{x}{x-2}}=\lim_{\varphi\to0}2\sqrt{\frac{2+\varphi}{2+\varphi-2}}=\lim_{\varphi\to0}2\sqrt{\frac{2+\varphi}{\varphi}}=+\infty$, pois o numerador tende para 2√2 e o denominador tende para zero por valores positivos.

- Calculemos agora $\lim_{x\to+\infty}2\sqrt{\frac{x}{x-2}}$.

Como x → + ∞, faremos x = $\frac{1}{\varphi}$, φ > 0 e φ → 0.

Ficamos com $\lim_{x\to+\infty}2\sqrt{\frac{x}{x-2}}=\lim_{\varphi\to0}2\sqrt{\frac{\frac{1}{\varphi}}{\frac{1}{\varphi}-2}}=\lim_{\varphi\to0}2\sqrt{\frac{\frac{1}{\varphi}}{\frac{1-2\varphi}{\varphi}}}=\lim_{\varphi\to0}2\sqrt{\frac{1}{1-2\varphi}}=2,$ pois o numerador tende para 2 e o denominador tende para 1.

Observação.

Cálculo de limites no infinito não pode ser aplicado, por exemplo, às funções trigonométricas, uma vez que algumas delas variam em certo intervalo, e outras crescem ou decrescem indefinidamente, dependendo do valor considerado.

Por exemplo, se tentássemos calcular o $\lim_{x \to +\infty} senx$, passaríamos infinitas vezes por todos os valores do intervalo [-1,1], pois, para todo x, -1 ≤ senx ≤ 1, isto é, não chegaríamos a valor algum definido.

Realmente as funções polinomiais, ou funções expressas por razões entre polinômios, são as mais adequadas à aplicação de limites.

2. OBSERVAÇÕES

1) O cálculo de limite apresentado surgiu da identificação da expressão "x tende a um certo número a" com a igualdade x = a + φ, ou x = a - φ, com φ > 0 e φ → 0, uma vez que, realmente, quando φ → 0, a + φ e a - φ tendem para a, e, com isso, x tende para a.

No caso de limites no infinito, a substituição para a expressão "x tende para + ∞" foi $x = \frac{1}{\varphi}$, e a substituição para a expressão "x tende para - ∞" foi x = $\frac{-1}{\varphi}$, com φ > 0 e φ → 0.

A substituição faz o maior sentido, pois, realmente, quando φ → 0, sempre por valores positivos, $\frac{1}{\varphi}$, tende a + ∞ e x = $\frac{-1}{\varphi}$, tende a - ∞, fazendo com que x tenda realmente a + ∞ ou a - ∞, conforme o caso.

Se substituíssemos, no caso em que "x tende a + ∞ ou a - ∞" o x por, a/φ ou -a/φ, a > 0, φ > 0 e φ → 0, o resultado seria o mesmo.

Um exemplo.

- Calculemos $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x^2}{x^2+300}$.

Faremos $x = \frac{a}{\varphi}$, a > 0, φ > 0 e φ → 0.

Ficamos com

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2}{x^2+300} = \lim_{\varphi \to 0} \frac{2(\frac{a}{\varphi})^2}{(\frac{a}{\varphi})^2+300} = \lim_{\varphi \to 0} \frac{\frac{2a^2}{\varphi^2}}{\frac{a^2+300\varphi^2}{\varphi^2}} = \lim_{\varphi \to 0} \frac{2a^2}{a^2+300\varphi^2} = \frac{2a^2}{a^2} = 2.$$

2. Como visto nos diversos exemplos, o “cálculo de limite” apresentado é bastante “fluente” e de aplicação direta**,** sem a necessidade de consultar teoremas ou de “organizar” a função antes de efetuar o cálculo, exceto quando temos que racionalizar.

Esse fato traz bastante tranquilidade na hora de calcularmos o limite de uma função, pois o “cálculo” apresentado constitui uma verdadeira síntese desse assunto.

Por exemplo, o “cálculo” pode ser utilizado diretamente sobre a função $f(x) = \frac{2x^2+x-3}{x-1}$, sem a necessidade de organizá-la, isto é, de expressá-la como $f(x) = \frac{(2x+3)(x-1)}{x-1}$.

Vejamos. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{2x^2+x-3}{x-1}$.

Como x → 1, podemos fazer, por exemplo, x = 1 + φ, φ > 0 e φ → 0.

Ficamos com

$$\lim_{x \to 1} \frac{2x^2+x-3}{x-1} = \lim_{\varphi \to 0} \frac{[2(1+\varphi)^2+(1+\varphi)-3]}{1+\varphi-1} = \lim_{\varphi \to 0} \frac{(2+4\varphi+2\varphi^2+\varphi-2)}{\varphi} = \lim_{\varphi \to 0} \frac{(2\varphi^2+5\varphi)}{\varphi} =$$
$$\lim_{\varphi \to 0}(2\varphi + 5) = 5.$$

Isso traz uma enorme vantagem em relação à atual apresentação desse assunto que, além de não apresentar nenhum cálculo de limite, se mostra bastante “engessada” pela quantidade imensa de teoremas que devem ser considerados nas “avaliações” dos limites, bem como das “organizações” que devem ser feitas sobre as funções antes de “estimar” o seu limite.

3) Gostaria de acrescentar**,** ao “cálculo de limite” apresentado, umas avaliações de natureza prática.

a) Só tem sentido calcular o limite de uma função próximo de um valor para o qual ela não esteja definida.

Se a função está definida para certo valor, isto é, se a função existe para certo valor, não tem nenhum sentido calcular o limite próximo desse valor, uma vez que conhecemos quanto vale a função naquele valor.

Por exemplo, seja f(x) = x^2 - 5x.

Esta função é definida para todo x, ela existe para todo x.

Logo, seria fora de propósito calcularmos, por exemplo, $\lim_{x \to 3} f(x)$, uma vez que a função existe para x = 3, isto é, para que calcularmos esse limite se podemos simplesmente substituir x por 3 em f(x) e obtermos o valor da função em 3, isto é, f(3)?

Com isto, centenas de exercícios deixam de ter razão de existir.

Obviamente as funções consideradas nesse artigo são de R → R.

b) Por se utilizar do conceito de limite, faremos aqui uma observação sobre continuidade de uma função.

Conforme livro de cálculo de Lethold (1994), a definição de função contínua num ponto assim se traduz:

> Dizemos que a função f é contínua no número a se e somente se as seguintes condições forem satisfeitas:
>
> (i) f(a) existe;
>
> (ii) $\lim_{x \to a}$ f(x) existe;
>
> (iii) $\lim_{x \to a}$ = f(a).
>
> Se uma ou mais de uma dessas condições não forem verificadas em a, a função f será descontínua em a.
>
> Assim Lima (1978) define continuidade de uma função:
>
> uma função f: X → R diz-se contínua no ponto a ∊ X quando é possível tornar f(x) arbitrariamente próximo de f(a) desde que se tome x suficientemente próximo de a.
>
> Em termos precisos, diremos que f: X → R é contínua no ponto a ∊ X quando, para todo ∊ > 0 dado arbitrariamente, pudermos achar δ > 0 tal que x ∊ X e | x - a | < δ impliquem | f(x) - f(a) | < ∊.

Sabemos que, se uma função está definida num certo intervalo, isto é, se ela existe para todo número contido num certo intervalo, então não há sentido algum em calcularmos o limite dessa função para algum número desse intervalo, uma vez que podemos simplesmente avaliar a função em todo número desse intervalo.

Em termos mais simples: se uma função, representada por apenas uma expressão, por apenas uma sentença, existe para certo número então é totalmente desnecessário calcularmos o limite da função para x → a, uma vez que, simplesmente, podemos calcular o valor da função em a.

É claro que, se calculássemos esse limite, como fizemos acima, ele seria f(a).

Como foi dito acima, só tem sentido calcular limite de uma função em torno de um número para o qual ela não esteja definida.

Sendo assim, se estamos analisando funções representadas por apenas uma expressão, dizer que uma função existe para um certo número a, significa dizer que existe o limite dessa função em a, sendo esse limite o valor da função em a, e com isso não precisamos calcular o limite dessa função nesse número a.

Aplicando isso à definição acima, de função contínua, os itens (ii) e (iii) da definição se tornarão desnecessários, uma vez que no item (i) se afirmar que f(a) existe.

Logo, para funções representadas por “apenas uma expressão”, a simples afirmação de que ela, a função f, está definida num número a, isto é, a simples afirmação de que f(a) existe é o suficiente para concluir que a função é contínua naquele número a.

Da mesma forma, com essa observação sobre funções contínuas, centenas de exercícios perdem a razão de existir.

Exemplo: seja a função $f(x) = x^2 - 3x$ que é definida para todo número real, isto é, existe para todo x real.

Com isto, não há necessidade de se calcular o limite de f(x) para nenhum valor de x, pois neste caso, estar definida em x é sinônimo de possuir limite em x e que esse limite é igual ao valor da função no x considerado.

Logo a função f é contínua para todo x.

3. CONCLUSÃO

No exposto, mostramos que, realmente, a teoria de limites é deficitária em relação a um cálculo de limite e, por isso, se cerca de uma série de argumentos baseados na definição de limite no intuito de preencher tal lacuna.

Apresentamos, então, o “cálculo de limite de uma função” e mostramos que ele sintetiza todo o assunto mencionado, tendo, por isso, aplicação direta.

Esperamos estar contribuindo para uma melhor compreensão de assunto tão fundamental em matemática.

REFERÊNCIAS

IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos et all. Fundamentos de Matemática Elementar, vol. 8, 1991.

LEITHOLD, Louis. O Cálculo com Geometria Analítica, vol. 1, 1994.

LIMA, Elon Lages. Curso de Análise, vol. 1, 1978.

MUNEM, Mustafa A. e FOULIS, David J. Cálculo, vol. 1, 1982.

Enviado: Junho, 2021.

Aprovado: Agosto, 2021.