“DIFERENÇA ENTRE QUADRADOS” NO TEOREMA DE PITÁGORAS

ARTIGO ORIGINAL

SOUZA JÚNIOR, Elias Pereira De [1]

SOUZA JÚNIOR, Elias Pereira De. **“Diferença entre quadrados” no Teorema de Pitágoras.** Revista Científica Multidisciplinar Núcleo do Conhecimento. Ano 05, Ed. 10, Vol. 06, pp. 05-13. Outubro de 2020. ISSN: 2448-0959, Link de acesso: https://www.nucleodoconhecimento.com.br/matematica/teorema-de-pitagoras

RESUMO

O presente artigo visa mostrar aplicações do conteúdo do Teorema de Pitágoras na construção do conhecimento na sala de aula, tendo como foco uma técnica algébrica para a “diferença entre quadrados”. Primeiramente, o trabalho explora a introdução e aplicação do Teorema de Pitágoras como um novo conteúdo de sala de aula dentro um exemplo contextualizado. Por conseguinte, o Teorema foi demonstrado pelo professor, e os alunos são levados a questionarem e raciocinarem métodos alternativos de se obterem resultados além do clássico Teorema de Pitágoras demonstrado. Logo, alguns métodos começaram a surgir, possibilidades de resoluções para o exemplo inicial, umas dessas formas foi a noção geométrica do Teorema, no entanto, os alunos continuaram as investigações. A parte crucial da aula foi o raciocínio do procedimento algébrico que chamou atenção de forma diferenciada durante as investigações dos alunos, foi a “diferença entre quadrados” como uma solução para o Teorema dentro do conjunto dos números naturais, visto que, nem todos os conjuntos numéricos atenderam a relação. E neste ponto criam-se reflexões para os alunos de como se pode explorar a matemática e investigá-la de diversas formas, pois a intenção foi explorar as diversidades da matemática e aguçar a sensibilidade dos alunos para fazerem novas descobertas. O Teorema de Pitágoras é

[1] Pós-graduação em Matemática.

muito conhecido e aplicado, pode ser facilmente encontrado em diversas literaturas matemáticas, mas, fazer com que os alunos transcendam fórmulas e procedimentos é ensinar a pensar.

Palavras-chaves: Educação, modelagem, ensino, Pitágoras, aprendizagem.

1. INTRODUÇÃO

O tema apresentado nesse artigo foi escolhido devido à uma experiência desenvolvida em sala de aula, que teve como objetivo explorar as formas de relacionar e aplicar o Teorema de Pitágoras na sua forma algébrica e geométrica segundo o estudo de triângulos com ênfase no triângulo retângulo, explorando a ideia do Teorema de Pitágoras na visão do aluno, assim conseguindo formar várias possibilidades de resoluções de problemas ligados ao Teorema, entre elas a "diferença entre quadrados.

Porém, buscou-se também neste artigo relatar uma experiência vivenciada na escola, através da coleta de informações e cálculos observados, procurando compreender a importância da construção do conhecimento pelo aluno, fazendo assim diferença no processo de ensino aprendizagem. Pois, na formação do conhecimento dos alunos, torna-se indispensável à prática direta, investigativa ou até mesmo lúdica em sala de aula, em que se acredita que dessa prática surjam desafios, dúvidas ou certezas se é mesmo esse caminho que o aluno quer seguir, o como fazer e o que não fazer para prosseguir, buscando assim a compreensão ideal na resolução de problemas. Nesta aula participaram 36 alunos da primeira série do Ensino Médio turma "A" do Colégio Sagrada Família, Brasília DF

Portanto, várias perspectivas de estudo são aplicadas ao Teorema de Pitágoras. Logo, será mostrada uma proposta simples em que se tem a interpretação do Teorema, relacionando-o a diferença entre quadrados. Resultando, assim, em um fato interessante de ser mostrado, inclusive do ponto de vista da educação.

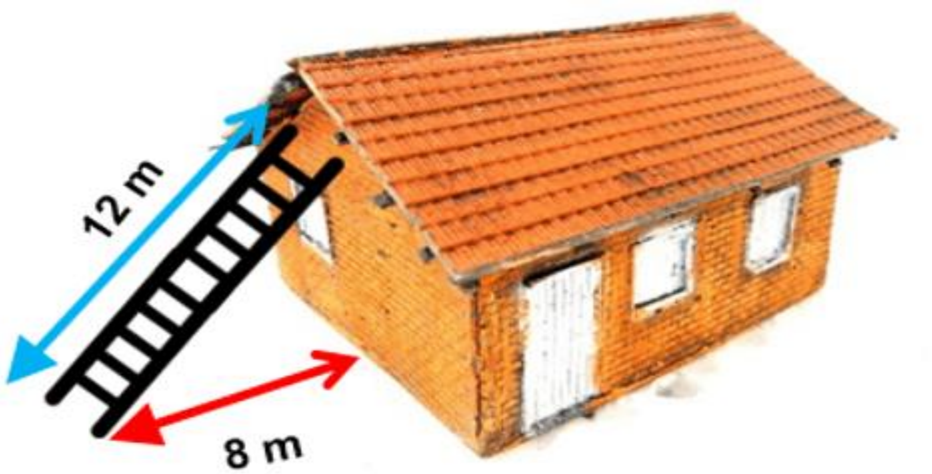
1.1 A PROPOSTA DE AULA E O TEOREMA DE PITÁGORAS

Instigar o aluno a buscar a solução de um problema ou mesmo incentivar a pesquisa em sala de aula, por diversas formas e possiblidades é usar uma metodologia diferente, ou seja, é aplicar a modelagem Matemática. Consequentemente, torna a sala de aula um campo de pesquisa e prática logo, um lugar mais interessante e atraente para os alunos, e faz toda a diferença.

A Educação Matemática vai além do tradicional, é inovar pela diversidade de ações possibilitando inúmeros métodos de ensino e aprendizagem. Porquanto, desafiar o aluno a encontrar por si só soluções de problemáticas é abrir possibilidades para novas descobertas, como um fio condutor em que a matemática vai sendo descoberta em vários contextos aplicáveis, D'ambrosio (1998), falava sobre as ideias citadas acima.

Então, a proposta feita aos alunos foi baseada na seguinte problemática, uma escada de 12 metros de comprimento está apoiada sob um muro. A base da escada está distante do muro cerca de 8 metros conforme a figura abaixo. Foi pedido então para os alunos determinarem a altura da parede.

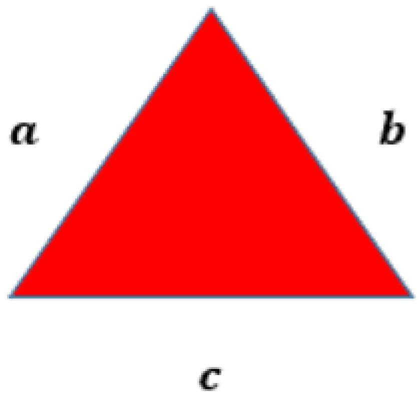
Figura 1: aplicação do triângulo retângulo



Fonte: https://produto.mercadolivre.com.br/MLB-1082280686-casa-de-tijolinho-m-para-maquete- ferromodelismo-ho-h2-_JM (2020)

Intuitivamente foi instruído aos alunos que tentassem encontrar o valor da medida da parede usando a definição fundamental para qualquer triângulo, conteúdo este já estudado em anos anteriores, servindo de base para introdução a outros conteúdos. De forma geral, para se construir um triângulo é possível verificar a condição de existência de triângulos, que é a medida de qualquer um dos lados seja menor que a soma das medidas dos outros dois e maior que o valor absoluto da diferença entre essas medidas, aplicando um padrão geométrico. Observa-se o seguinte padrão:

Figura 2: Condição de existência de um triângulo



$$|b - c| < a < b + c$$

$$|a - c| < b < a + c$$

$$|a - b| < c < a + b$$

Fonte: Autor.

Os alunos chegaram em alguns valores possíveis e pertinentes para se calcular a medida da escada, como um dos lados do triângulo. Porém, para ser aplicado o Teorema de Pitágoras é necessário que o triângulo tenha pelo menos um de seus ângulos medindo 90º. Logo, o próximo passo, foi demonstrar o teorema de Pitágoras.

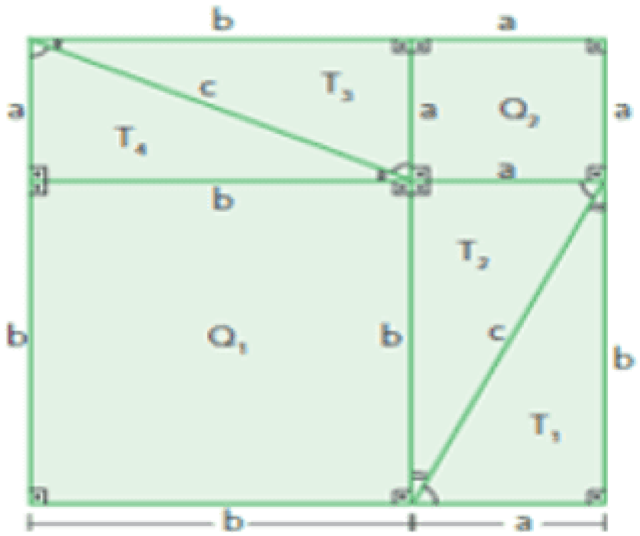
1.2 DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DE PITÁGORAS

No processo de aprendizagem depois do processo inicial de investigação sobre triângulos e sua existência, o próximo passo foi aguçar a curiosidade dos alunos para se formalizar algumas curiosidades e conclusões iniciais. Então, nessa parte da aula os alunos relacionaram vários quadrados com as suas respectivas áreas tentando encontrar padrões junto a mediação do professor. Logo, os alunos começaram a enxergar as propriedades que Pitágoras usou para o teorema, que tem por base a

MULTIDISCIPLINARY SCIENTIFIC JOURNAL NÚCLEO DO CONHECIMENTO
REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR NÚCLEO DO CONHECIMENTO ISSN: 2448-0959
https://www.nucleodoconhecimento.com.br

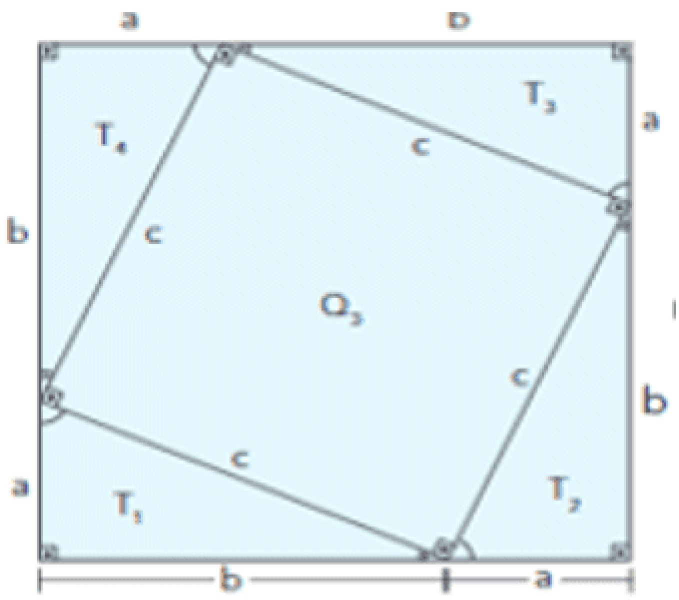
soma das áreas dos polígonos que formam uma figura construída de triângulos retângulos congruentes, isto é, comparar as áreas conforme demonstrado nas figuras a seguir.

Figura 3 Demonstração do Teorema de Pitágoras



Fonte: Autor.

Figura 4 Demonstração do Teorema de Pitágoras



Fonte: Autor.

Considere que os 2 lados menores de um triângulo são chamados de catetos e o maior lado de um triângulo reto é a hipotenusa. Note que as figuras foram construídas utilizando-se quatro triângulos retângulos congruentes de catetos iguais a "a" e "b" e hipotenusa "c" formando quadrados maiores de lados iguais a (a + b). Se retirados os quatro triângulos retângulos congruentes das duas figuras, as figuras restantes possuem a mesma área. Portanto, tem-se

Na figura 3:

- Soma das áreas dos quatro triângulos retângulos = (T1 + T2 + T3 +T4)
- Área restante Q1 + Q2 = $a^2 + b^2$

Na figura 4:

- Soma das áreas dos quatro triângulos retângulos = (T1 + T2 + T3 +T4)
- Área restante = Q3 = c^2

Logo, $\mathbf{c^2 = a^2 + b^2}$

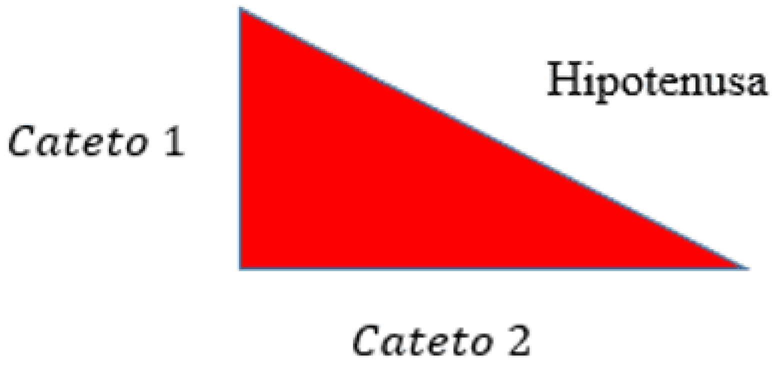
Essa relação pode ser aplicada em qualquer triângulo retângulo. Sendo "c" o maior lado do triângulo chamado de hipotenusa, "a" e "b" os catetos do triângulo como demonstrado acima.

1.3 RETOMANDO O EXEMPLO INICIAL

Ficando claro para os alunos depois da demonstração do Teorema que a questão se trata de uma aplicação do teorema de Pitágoras, em que os lados são chamados de catetos e o maior lado do triângulo que está oposto ao ângulo de é chamado de hipotenusa. Assim, pode-se escrever a relação pitagórica dessa forma:

$$(Hipotenusa)^2 = (Cateto\ 1)^2 + (cateto\ 2)^2$$

Figura 5: triângulo retângulo



Fonte: Autor.

Por conseguinte:

Os alunos aplicaram a relação acima da seguinte forma:

- A hipotenusa equivale a escada (12 m)
- A distância entre a escada e a parede é um cateto (8 m)
- A altura da parede é o outro cateto, nesse caso "x"

aplicando o teorema:

$$12^2 = 8^2 + x^2$$

Subtraindo 8^2 dos dois lados da igualdade

$$12^2 - 8^2 = 8^2 + x^2 - 8^2$$

$$12^2 - 8^2 = x^2$$

Nesse ponto um aluno trouxe um questionamento sobre a subtração de quadrados: - "só podemos resolver essa subtração após resolvermos os quadrados?"

Daí começaram as investigações de outras formas de se subtrair quadrados.

1ª solução:

$$12^2 - 8^2 = x^2$$

$$144 - 64 = x^2$$

$$80 = x^2$$

$$\sqrt{80} = x$$

$$4\sqrt{5} = x$$

2ª solução:

Foi observado um padrão pelo professor junto com os alunos. Veja abaixo:

$$12^2 - 8^2 = x^2$$

$$12 + 8 + 2.(9 + 10 + 11) = x^2$$

$$80 = x^2$$

$$\sqrt{80} = x$$

$$4\sqrt{5} = x$$

Nesse ponto foi notado um padrão para diferença entre quadrados, em que os números pertencem ao conjunto dos números naturais, na forma $\mathbb{N}^*$.

Exemplo:

MULTIDISCIPLINARY SCIENTIFIC JOURNAL NÚCLEO DO CONHECIMENTO
REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR NÚCLEO DO CONHECIMENTO ISSN: 2448-0959
https://www.nucleodoconhecimento.com.br

$$a = 23 \; e \; b = 19, aplicando \ldots$$

$$a^2 - b^2 = 23^2 - 19^2 = 23 + 19 + 2.(20 + 21 + 22) = 168$$

Fazendo a prova:

$$a^2 - b^2 = 23^2 - 19^2 = 529 - 361 = 168$$

A igualdade é verdadeira para os números $\mathbb{N}^*$. Depois de testado as operações no conjunto dos números naturais, foi também aplicado para alguns outros conjuntos, como para o conjunto dos números inteiros que também funcionou e para o reais, o qual neste último caso alguns números não conseguiram estabelecer uma igualdades verdadeira, fixando assim essa aplicação para os números naturais.

2. PROVANDO A RELAÇÃO

Relação para diferença entre quadrados:

$$\boldsymbol{a^2 - b^2 = a + b + 2\left(\sum_{k>b}^{k<a} k\right),} \qquad \boldsymbol{com\ a, b\ e\ k} \in \mathbb{N}^*$$

Considere

$a^2 + b^2$ com a e b pertencente aos números naturais maiores que zero, considerando a > b, tem-se a seguinte proposição para a e b:

$$a^2 - b^2 = a + b + 2\left(\sum_{k>b}^{k<a} k\right), \qquad com\, k \in \mathbb{N}^*$$

Logo se

$$a = 3 \text{ e } b = 1,$$

Então

$$3^2 - 1^2 = 3 + 1 + 2\left(\sum_{k>1}^{k<3} (2)\right) \ ...$$

$$9 - 1 = 3 + 1 + 2.(2) \ ...$$

$$8 = 8$$

Agora, considerando *m* como um número natural qualquer.

Se a e b são verdadeiros, para a e b, ∈ $\mathbb{N}^*$, então a = b + m, também será verdadeira, para m ∈ $\mathbb{N}^*$.

Tomando m = 1, para

$$(b + m)^2 - b^2 = (b + m) + b + 2\left(\sum_{k>b}^{k<a} k\right) \ ... \text{Hipótese}$$

$$(b + 1)^2 - (b)^2 = (b + 1) + (b) + 2.(0)$$

$$b^2 + 2b + 1 - b^2 = 2b + 1$$

Logo,

$$2b + 1 \ = \ 2b + 1$$

Portanto, a relação $a^2 - b^2 = a + b + 2\left(\sum_{k>b}^{k<a} (k)\right)$, é válida para qualquer $a \text{ e } b, \epsilon \ \mathbb{N}^*$

Como quis demonstrar!

Esta demonstração foi prontamente mostrada para os alunos que se surpreenderam com a aplicação que eles mesmos tinham chegado, encontrado assim uma relação diferenciada para o Teorema de Pitágoras na “diferença entre quadrados”.

3. CONCLUSÃO

O intuito de instigar os alunos a encontrarem formas diversas de solucionar problemas é construir o conhecimento utilizando as competências e habilidades já adquiridas, dando base para novas aprendizagens e descobertas. Este artigo é um exemplo disso, pois, foram dadas orientações básicas por parte do professor, e os alunos foram investigar formas de solucionar o problema.

O que torna mais interessante, é que no meio das investigações, podem existir várias maneiras de se chegar a um resultado. Enxergar essas maneiras e guia-las torna a Educação Matemática diferenciada e agradável para os alunos, justificando assim a modelagem Matemática.

Então, seguindo as aplicações do Teorema de Pitágoras no exemplo inicial, o professor junto aos alunos discutiram as formas de se resolverem a diferença entre quadrados, sempre deixando claro que a construção do conhecimento é a parte fundamental da aula, o professor é o mediador e os alunos fazem as descobertas.

Em um dos processos em que o aluno levantou o questionamento sobre o cálculo da diferença entre quadrados na resolução do problema, a turma junto ao professor pôde afirmar que o método observado para a subtração de quadrados é válido sobre alguns pontos relevantes.

Por conseguinte, o professor demonstrou a aplicabilidade da operação descoberta dentro do conjunto dos números naturais, solucionando o questionamento da aplicabilidade da operação, deixando claro o método para o aluno e para a turma. Logo, finalizamos a questão e resolvemos outros exemplos com o método descoberto. O retorno do aluno para a turma foi a seguinte fala “descobrimos uma fórmula nova, que legal”, para um professor de exatas não tem como uma fala ser mais marcante como essa.

O aluno pediu orientação para estudar somatórios e demonstrações. Isso um garoto da primeira série do Ensino Médio, o desenvolvimento futuro desse aluno deixo na imaginação de quem leu este artigo.

4. REFERÊNCIAS

DANTE, Luiz Roberto. MATEMÁTICA: Contexto e Aplicações volume único / Luiz Roberto Dante, Fernando Viana - - 4. Edição - - São Paulo: Ática, 2018.

HEFEZ, Abramo. Indução Matemática:\induçãofinal". Estilo OBMEP - Rio de Janeiro - Departamento de Matemática Aplicada Universidade Federal Fluminense, 2009. Disponível em: http://www.obmep.org.br/docs/apostila4.pdf. Acesso em: 04 maio de 2020. D'Ambrósio, U.Etnomatemática. São Paulo: Ática, 1998.

SANTOS. Marconi Coelho dos. Teorema de Pitágoras: suas diversas demonstrações. Campina Grande (PB):UEPB, 2011. 42f. Monografia (Especialização em Educação Matemática para professores do Ensino Médio) {Universidade Estadual da Paraíba, Centro de Ciências e Tecnologia, Campina Grande, 2011.

VIANA, M. C. V.; SILVA, C. M. Concepções de Professores de Matemática sobre a utilização da História da Matemática no processo de Ensino-Aprendizagem. In:

ENCONTRO NACIONAL DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA, 9., 2007, Belo Horizonte. Pôsteres... Belo Horizonte, 2007. Disponível: https://www2.unifap.br/matematicaead/_les/2016/03/TCC-REVISADO.pdf Acesso em: 04 maio de 2020.

Enviado: Setembro, 2020.

Aprovado: Outubro, 2020.