



DEMONSTRAÇÃO DO CÁLCULO DA LINHA NEUTRA EM VIGAS SUBMETIDAS À FLEXÃO

ARTIGO ORIGINAL

MOURA, Tiago Rodrigues Coelho de ¹

MOURA, Tiago Rodrigues Coelho de. **Demonstração do cálculo da linha neutra em vigas submetidas à flexão.** Revista Científica Multidisciplinar Núcleo do Conhecimento. Ano 04, Ed. 10, Vol. 10, pp. 99-115. Outubro de 2019. ISSN: 2448-0959, Link de acesso: <https://www.nucleodoconhecimento.com.br/engenharia-civil/calculo-da-linha>

RESUMO

Um dos sistemas construtivos mais usado no Brasil é o concreto armado. Normalmente, as estruturas são constituídas por lajes, vigas, pilares e fundação. Todos esses elementos devem ser dimensionados e verificados a fim de resistir todos os esforços solicitantes. No dimensionamento, especificamente nas vigas e lajes, são feitas várias verificações. Uma das verificações, exigida pela norma vigente, é a posição da linha neutra. Essa linha neutra separa a região comprimida da região tracionada de um elemento submetido à flexão. Este estudo apresentou, de forma didática, o cálculo dessa linha neutra e as equações deduzidas para facilitar o trabalho dos profissionais de engenharia civil. Ao longo do texto, é exposto o passo a passo do cálculo para vigas com diversos tipos de seções transversais: retangular, I, T e trapezoidal. Todos os cálculos aplicáveis a vigas de concreto armado. Cada tipo de seção transversal resultou em equações diferentes. Normalmente, chega-se a

¹ Pós-graduado em Gestão de Obras na Construção Civil pela Faculdade Cidade Verde (FCV), Engenheiro Civil pelo Centro Universitário UNIEURO e técnico em Telecomunicações Aeronáuticas pela Escola de Especialista de Aeronáutica (EEAR).



equações do segundo grau para seções geometricamente retangulares e do terceiro grau para seções com partes triangulares.

Palavras-Chave: linha neutra, concreto, estruturas, flexão, vigas.

1. INTRODUÇÃO

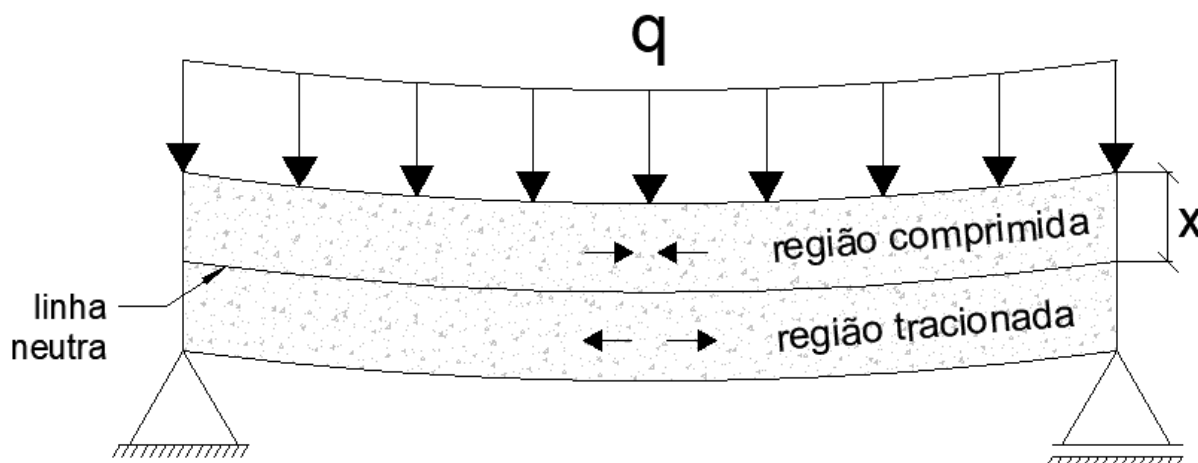
Uma análise bem detalhada dos elementos estruturais é de grande importância para garantir a segurança das edificações. As normas da Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT) amparam, de forma ampla, o dimensionamento de estruturas na construção civil, em especial, a NRB 6118 (ABNT, 2014) que trata das estruturas de concreto armado. Nessa norma estão previstas várias verificações, uma delas é a posição da linha neutra em vigas. A linha neutra é compreendida como um plano que separa duas regiões – a comprimida e a tracionada – num mesmo elemento quando submetido à flexão. Além das verificações especificadas nessa norma, a posição da linha neutra, em relação à fibra mais comprimida, é necessária para calcular a área de aço de tração da viga. Esse breve estudo tem a finalidade de demonstrar o desenvolvimento das equações desse parâmetro, nos elementos estruturais submetidos à flexão simples.

2. DESENVOLVIMENTO

2.1 LINHA NEUTRA EM VIGA DE SEÇÃO TRANSVERSAL QUALQUER.

A linha neutra, em um elemento sob flexão simples, separa a região comprimida da região tracionada. A Figura 1 exemplifica essas regiões em uma viga com carregamento uniforme. Nesse caso, todas as cargas transversais produzem um momento fletor que determina a posição dessa linha.

Figura 1 – Linha neutra em viga.



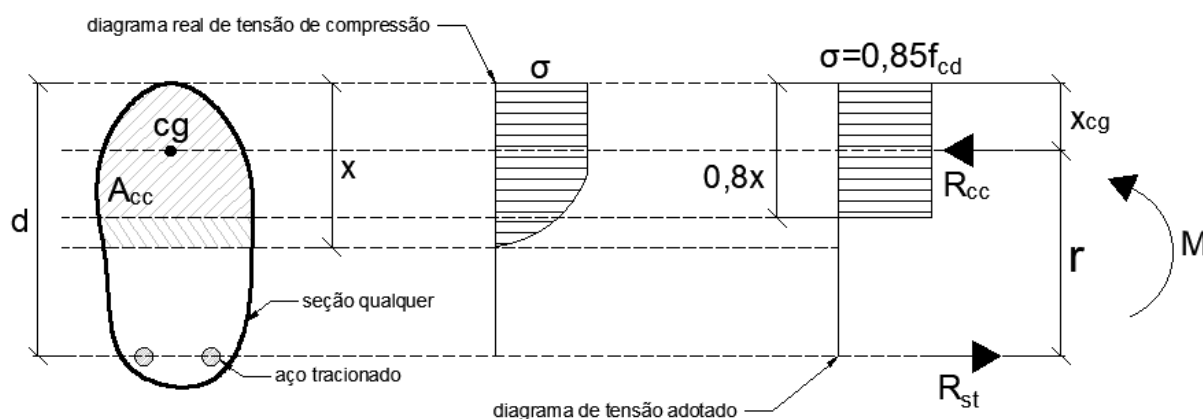
Fonte: própria

Nesses elementos, linha neutra é obtida em função do momento fletor na seção transversal. Fazendo o equilíbrio desse momento, em relação à região comprimida e ao aço tracionado, obtém-se a equação inicial do problema. Algumas observações previstas na NBR 6118 (ABNT, 2014) devem ser consideradas; a tensão efetiva na compressão do concreto é uma delas.

A tensão de pico do concreto, em acordo com o item 8.2.10 da NBR 6118 (ABNT, 2014), é 85% da tensão de cálculo. Essa consideração normativa visa garantir a segurança da região comprimida do elemento.

A posição de cálculo da linha é considerada em 80% da real. Esse modelo de cálculo é adotado para garantir, de forma homogênea, uma distribuição da tensão de compressão, conforme apresentado por Carvalho e Filho (2007). O esquema para demonstração dessa consideração está exposto na Figura 2, onde o gráfico de tensão real do concreto é substituído por outro equivalente, porém, de forma retangular.

Figura 2 – Linha neutra numa seção qualquer.



Fonte: própria

Os cálculos são baseados no equilíbrio de momento fletor da região comprimida do concreto e da tração do aço na seção transversal da viga. Conforme a Figura 2, podemos calcular a força na região comprimida (R_{cc}) em função da tensão e área.

$$Tensão = \frac{Força}{Área} \rightarrow R_{cc} = 0,85f_{cd} \cdot A_{cc} \quad (1)$$

Onde

R_{cc} : força de reação da região comprimida;

f_{cd} : tensão de resistência de cálculo do concreto;

A_{cc} : área de concreto sob compressão.

A força de reação da região comprimida é concentrada no centro de gravidade da área de concreto sob compressão. A distância (x_{cg}) desse centro de gravidade até a face mais comprimida da viga pode ser calculado com as seguintes equações:

- Para um contorno da seção transversal definido por uma função $f(x)$ num intervalo de “a” até “b”.



$$x_{cg} = \frac{\int_a^b f(x)x dx}{\int_a^b f(x) dx} \quad (2)$$

- Para uma seção transversal definida por figuras geometricamente conhecidas.

$$x_{cg} = \frac{\sum A_i x_i}{\sum A_i} \quad (3)$$

Onde

A_i : área das figuras geometricamente conhecidas;

r_i : distância do centro de gravidade de cada A_i à face mais comprimida.

O momento fletor (M) na seção transversal analisada é o produto da força de reação da região comprimida (R_{cc}) pela distância (r) do centro de gravidade da área comprimida até a barra de aço tracionada, conforme pode ser visto na Figura 2.

$$\text{Momento} = \text{Força} \cdot \text{braço de alavanca}$$

$$M = R_{cc} \cdot r$$

Onde: $r = d - x_{cg}$

Logo temos:

$$M = 0,85 \cdot f_{cd} \cdot A_{cc} \cdot (d - x_{cg}) \quad (4)$$

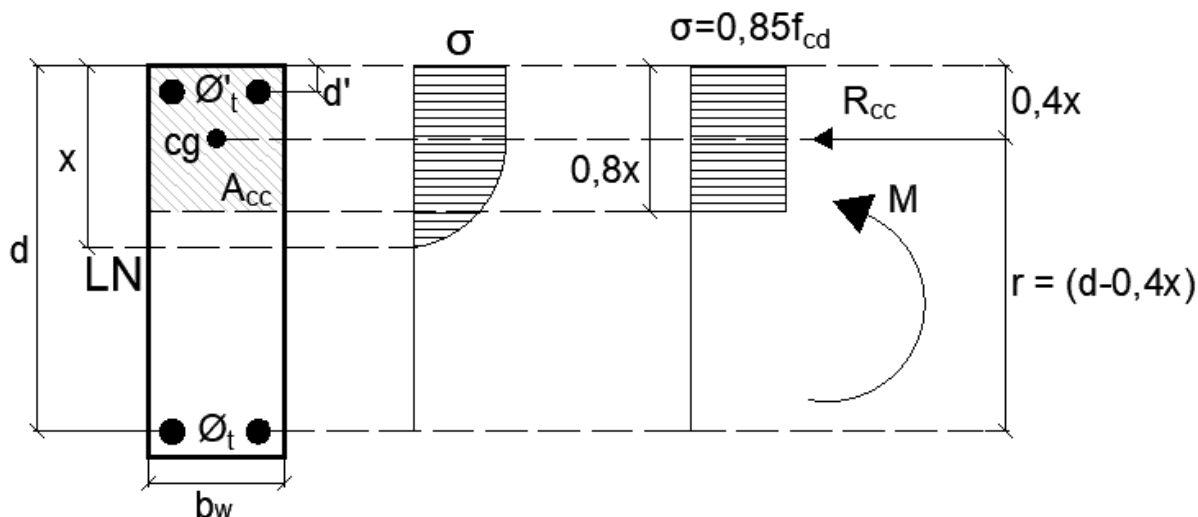
Fazendo as manipulações algébricas da equação acima, chega-se a funções de graus diversos que variam de acordo com a seção transversal da viga. Normalmente, tem-se o grau 2 para seções retangulares. Uma das raízes dessas funções é a posição da linha neutra no elemento estrutural.

2.2 LINHA NEUTRA EM VIGA RETANGULAR

Com base no modelo apresentado no item 2.1 deste artigo, foi obtida a posição da linha neutra para uma viga retangular. A fórmula encontrada para esse tipo de seção transversal pode ser vista em diversos livros, mas o objetivo aqui é demonstrar a dedução da mesma.

A Figura 3 mostra a posição da linha neutra e o gráfico de tensão do concreto para uma viga de seção transversal retangular. O equilíbrio de momento é feito, dessa forma, tem-se a separação das regiões tracionada e comprimida.

Figura 3 – Linha neutra em viga retangular.



O equilíbrio de momento se dá pelo somatório do momento fletor solicitante e pelo momento gerado pela força de reação da região comprimida de concreto. Com isso, fazendo uso da equação 4, temos a expressão abaixo.

$$M = 0,85 \cdot f_{cd} \cdot A_{cc} \cdot (d - 0,4x) \quad (5)$$

A área de concreto da região comprimida é calculada em função do modelo do gráfico de tensão adotado.

$$A_{cc} = b_w \cdot 0,8x \quad (6)$$

Fazendo a substituição da equação 6 na equação 5, temos a expressão final para o obter a posição da linha neutra.



$$M = 0,85 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot 0,8x \cdot (d - 0,4x)$$
$$\frac{M}{0,85 \cdot f_{cd} \cdot b_w} = 0,8dx - 0,32x^2 \quad (7)$$

Note que a equação 7 é do 2º grau e suas raízes podem ser facilmente encontradas, conforme demonstração a seguir. A maior raiz dessa equação é desprezada, pois, não tem sentido físico para o problema.

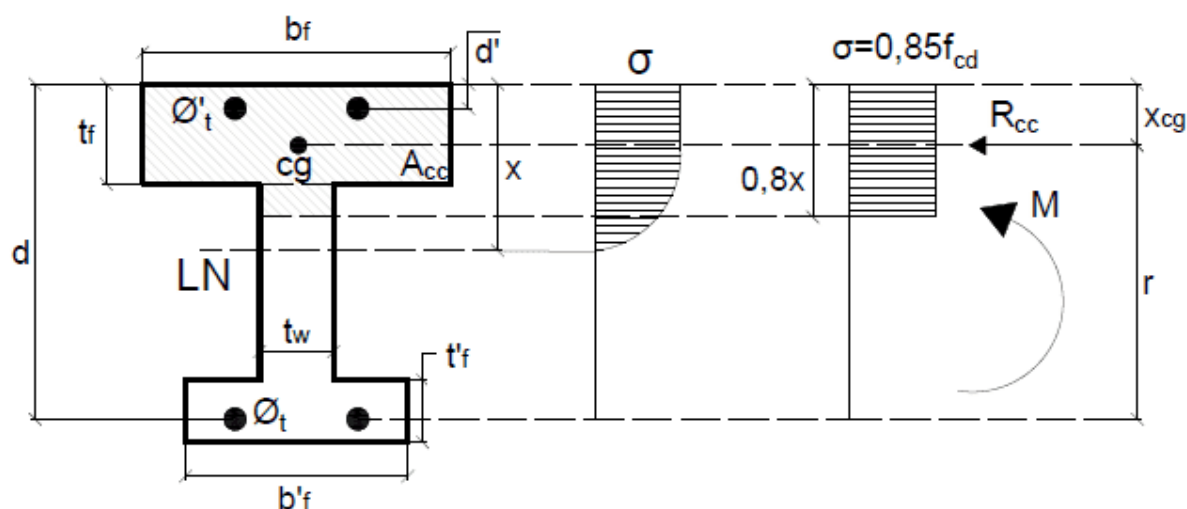
$$0,32x^2 - 0,8dx + \frac{M}{0,85 \cdot f_{cd} \cdot b_w} = 0$$
$$x = \frac{-(-0,8d) - \sqrt{(-0,8d)^2 - 4 \cdot 0,32 \cdot \left(\frac{M}{0,85 \cdot f_{cd} \cdot b_w}\right)}}{2 \cdot 0,32}$$
$$x = \frac{0,8d - \sqrt{0,64d^2 - 1,28 \cdot \left(\frac{M}{0,85 \cdot f_{cd} \cdot b_w}\right)}}{0,64}$$
$$x = \frac{0,8d - 0,8d \sqrt{1 - \frac{1,28}{0,64d^2} \cdot \left(\frac{M}{0,85 \cdot f_{cd} \cdot b_w}\right)}}{0,64}$$
$$x = 1,25d \left(1 - \sqrt{1 - \frac{M}{0,425 \cdot d^2 \cdot f_{cd} \cdot b_w}}\right) \quad (8)$$

A posição da linha neutra é calculada com o uso da equação 8, porém, deve-se observar os limites estabelecidos pela NBR 6118 (ABNT, 2014). Esses limites visam garantir a segurança da estrutura.

2.3 LINHA NEUTRA EM VIGA I E VIGA T SEM MÍSULA

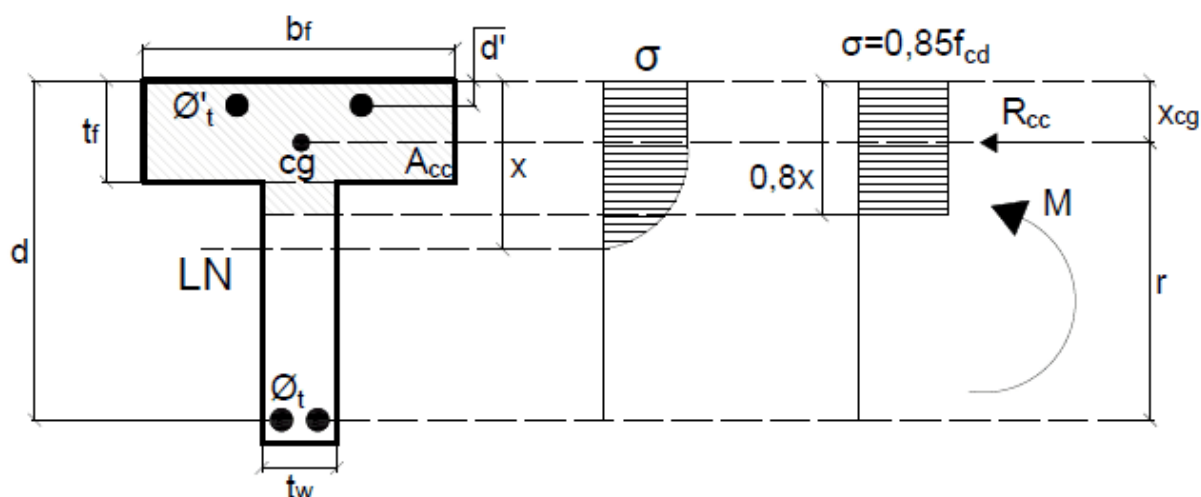
De modo semelhante às seções retangulares, encontra-se a linha neutra em outros tipos de vigas, aplicando o modelo apresentado no item 2.1 acima. Deve-se observar que as seções I e T não possuem as mesmas dimensões ao longo da altura, devido a isso, devem-se fazer os cálculos para duas hipóteses: linha neutra na mesa e linha neutra na alma. As Figuras 4 e 5 mostram os esquemas de todas as considerações feitas nesse tipo de viga.

Figura 4 – Linha neutra em viga I sem mísula.



Fonte: própria

Figura 5 – Linha neutra em viga T sem mísula.



Fonte: própria

Quando a linha neutra passar na mesa da viga, é válida a equação 8, porém, deve se substituir o “ b_w ” pelo “ b_f ”, dessa forma temos a equação 9.

$$x = 1,25d \left(1 - \sqrt{1 - \frac{M}{0,425 \cdot d^2 \cdot f_{cd} \cdot b_f}} \right) \quad (9)$$



Quando a linha neutra passar sobre a alma da viga, é feito o mesmo equilíbrio de momento, porém, nessa parte, as mudanças ficam na área de concreto sob compressão (A_{cc}) e no seu centro de gravidade. Isso ocorre devido à geometria da seção transversal. Usando a equação 3, encontra-se a distância desse centro de gravidade até a face mais comprimida da viga para esse tipo de seção.

$$x_{cg} = \frac{\sum A_i x_i}{\sum A_i} = \frac{(A_{mesa} \cdot x_{mesa}) + (A_{comprimida\ da\ alma} \cdot x_{\text{área comprimida da alma}})}{(A_{mesa}) + (A_{comprimida\ da\ alma})}$$
$$x_{cg} = \frac{\left(b_f t_f \cdot \frac{t_f}{2}\right) + \left(t_w (0,8x - t_f) \cdot \left(t_f + \frac{(0,8x - t_f)}{2}\right)\right)}{(b_f t_f) + (t_w (0,8x - t_f))}$$
$$x_{cg} = \frac{(0,5b_f t_f^2) + (t_w (0,8x - t_f) \cdot (0,5t_f + 0,4x))}{(b_f t_f) + (t_w (0,8x - t_f))} \quad (10)$$

A área de concreto comprimida fica conforme a equação 11.

$$A_{cc} = (b_f t_f) + (t_w (0,8x - t_f)) \quad (11)$$

Fazendo o equilíbrio de momento, com uso da equação 4, temos a expressão abaixo.

$$\frac{M}{0,85 \cdot f_{cd}} = A_{cc} \cdot (d - x_{cg})$$
$$\frac{M}{0,85 \cdot f_{cd}} = [A_{cc}]d - [A_{cc}]x_{cg}$$
$$\frac{M}{0,85 \cdot f_{cd}} = [(b_f t_f) + (t_w (0,8x - t_f))]d - [(b_f t_f) + (t_w (0,8x - t_f))] \cdot \left[\frac{(0,5b_f t_f^2) + (t_w (0,8x - t_f) \cdot (0,5t_f + 0,4x))}{(b_f t_f) + (t_w (0,8x - t_f))} \right]$$
$$\frac{M}{0,85 \cdot f_{cd}} = db_f t_f + dt_w (0,8x - t_f) - (0,5b_f t_f^2) - (t_w (0,8x - t_f) \cdot (0,5t_f + 0,4x))$$
$$\frac{M}{0,85 \cdot f_{cd}} = db_f t_f + 0,8dt_w x - dt_w t_f - 0,5b_f t_f^2 - 0,4t_w t_f x + 0,5t_w t_f^2 - 0,32t_w x^2 + 0,4t_w t_f x$$
$$0,32t_w x^2 - 0,8dt_w x + \frac{M}{0,85 \cdot f_{cd}} - dt_f (b_f - t_w) + 0,5t_f^2 (b_f - t_w) = 0 \quad (12)$$

Observe que a equação 12 também é do 2º grau. Da mesma forma das seções retangulares, a maior raiz dessa equação é desprezada, pois, não tem sentido físico para o problema.

$$x = \frac{-(-0,8dt_w) - \sqrt{(-0,8dt_w)^2 - 4 \cdot 0,32 \cdot \left(\frac{M}{0,85 \cdot f_{cd}} - dt_f(b_f - t_w) + 0,5t_f^2(b_f - t_w) \right)}}{2 \cdot 0,32t_w}$$

$$x = \frac{0,8dt_w - \sqrt{0,64d^2t_w^2 - 1,28t_w \cdot \left(\frac{M}{0,85 \cdot f_{cd}} - dt_f(b_f - t_w) + 0,5t_f^2(b_f - t_w) \right)}}{0,64t_w}$$

$$x = \frac{0,8dt_w - 0,8dt_w \sqrt{1 - \frac{1,28t_w}{0,64d^2t_w^2} \cdot \left(\frac{M}{0,85 \cdot f_{cd}} - dt_f(b_f - t_w) + 0,5t_f^2(b_f - t_w) \right)}}{0,64t_w}$$

$$x = 1,25d \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2}{d^2t_w} \cdot \left(\frac{M}{0,85 \cdot f_{cd}} - dt_f(b_f - t_w) + 0,5t_f^2(b_f - t_w) \right)} \right) \quad (13)$$

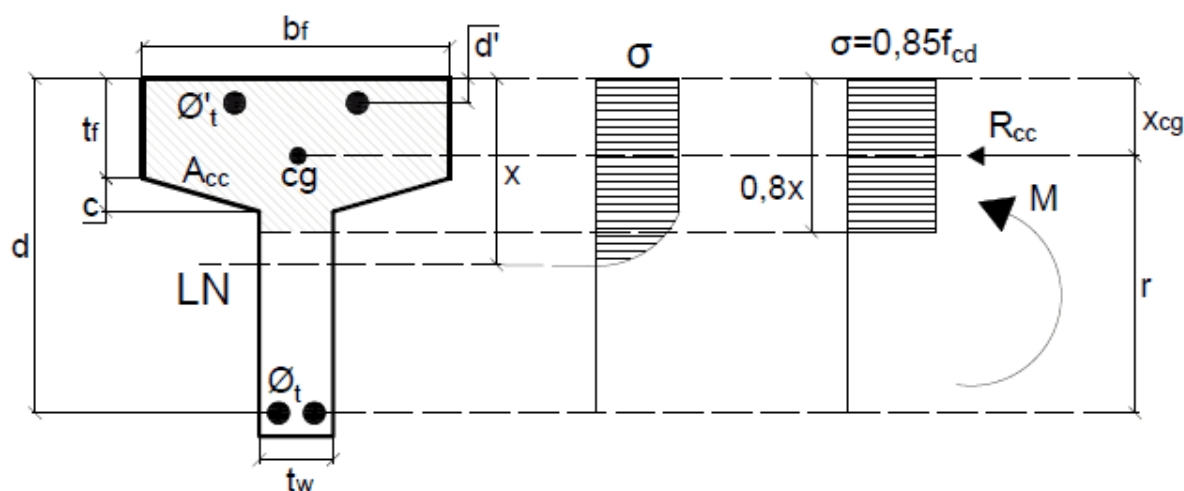
Para as vigas do tipo T e I, a posição da linha neutra (LN) é calculada com o uso das equações 9 e 13, respectivamente, para LN na mesa e LN na alma. Deve-se observar a espessura da mesa para determinar o limite de transição entre a mesa e a alma da viga. Devido aos limites estabelecidos pela NBR 6118 (ABNT, 2014), não se faz necessário o cálculo da linha neutra na mesa inferior da viga I.

2.4 LINHA NEUTRA EM VIGA I E EM VIGA T COM MÍSULA NA MESA

Nas estruturas correntes, é comum o uso de mísula nas vigas do tipo T e I. Esse tipo de viga pode ser calculado, de forma aproximada, conforme o item anterior. Mas, para encontrar resultados mais fidedignos, será apresentado aqui uma maneira de obter a posição da linha neutra vigas T e I com mísula.

As Figuras 6 e 7 exemplificam, de maneira objetiva, a forma da seção transversal e seus gráficos de tensões aproximados para esse tipo de viga.

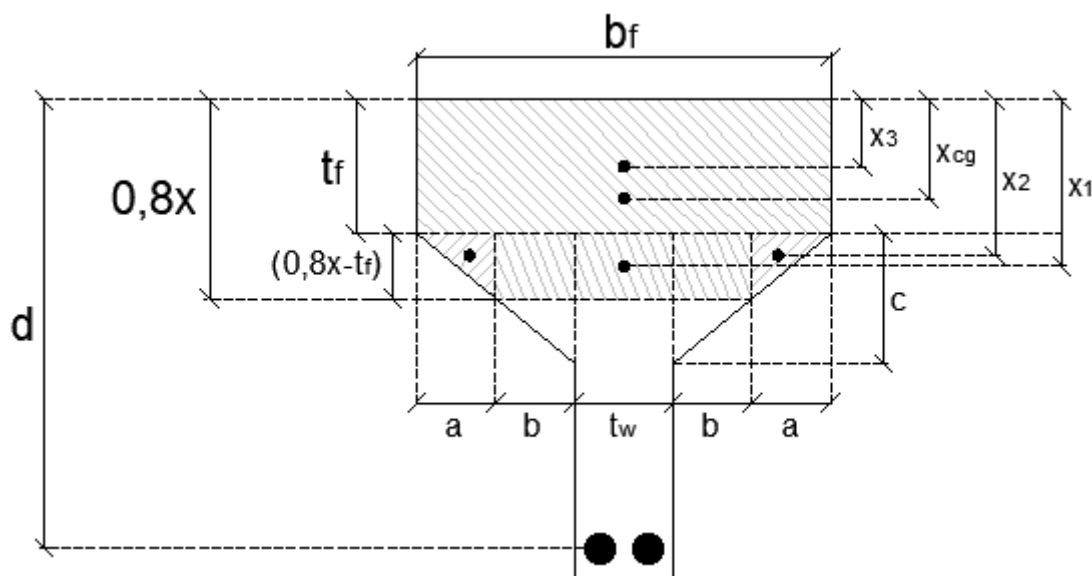
Figura 7 – Linha neutra em viga T com mísula na mesa.



Nesse tipo de viga, há três hipóteses. A primeira é o caso da linha neutra passar na mesa da viga, com isso, é válida a equação 9. A segunda ocorre quando a linha neutra passa sobre a região com mísula. A terceira é o caso da linha neutra na alma da viga, nesse caso, teremos uma solução semelhante à equação 13, porém, com alguns ajustes em função da área de concreto sob compressão (A_{cc}). Como a primeira hipótese já possui uma equação definida, iniciaremos neste item a dedução para a

segunda hipótese. Com a aplicação da equação 3, encontra-se a distância do centroide da região sob compressão até a face mais comprimida da viga, conforme Figura 8.

Figura 8 – Centro de gravidade da área comprimida.



Fonte: própria

Nesse caso, onde há regiões triangulares na seção transversal, é mais complicada a dedução das equações. Devido a isso, iniciaremos com os cálculos das distâncias x_1 , x_2 e x_3 com suas respectivas áreas geométricas.

O valor de x_1 é a distância do centro de gravidade do retângulo da região com mísula até a face superior da viga, conforme a Figura 8.

$$x_1 = t_f + \frac{0,8x - t_f}{2} \rightarrow x_1 = \frac{0,8x + t_f}{2} \quad (14)$$

O valor de x_2 é a distância do centro de gravidade dos triângulos à face superior da viga, conforme a Figura 8.

$$x_2 = t_f + \frac{0,8x - t_f}{3} \rightarrow x_2 = \frac{0,8x + 2t_f}{3} \quad (15)$$



O valor de x_3 é a distância do centro de gravidade do retângulo, referente à mesa, até a face superior da viga, conforme a Figura 8.

$$x_3 = \frac{t_f}{2} \quad (16)$$

Cálculo da área 1 (A_1) referente ao retângulo de x_1 .

$$A_1 = (2b + t_w) \cdot (0,8x - t_f)$$

Onde, por semelhança de triângulo, “ b ” é igual a:

$$b = 0,5(b_f - t_w) - \frac{0,4}{c}(b_f - t_w)x + \frac{0,5}{c}(b_f - t_w)t_f$$

$$\therefore A_1 = \frac{-0,64}{c}(b_f - t_w)x^2 + \left[\frac{1,6t_f}{c}(b_f - t_w) + 0,8b_f\right]x - \left[b_f + \frac{t_f}{c}(b_f - t_w)\right]t_f \quad (17)$$

Cálculo da área 2 (A_2) referente aos dois triângulos de x_2 .

$$A_2 = a \cdot (0,8x - t_f)$$

Onde, por semelhança de triângulo, “ a ” é igual a:

$$a = \frac{0,4}{c}(b_f - t_w)x - \frac{0,5}{c}(b_f - t_w)t_f$$
$$\therefore A_2 = \frac{0,32}{c}(b_f - t_w)x^2 - \frac{0,8t_f}{c}(b_f - t_w)x + \frac{0,5t_f^2}{c}(b_f - t_w) \quad (18)$$

Cálculo da área 3 (A_3) referente ao retângulo de x_3 .

$$A_3 = b_f \cdot t_f \quad (19)$$

Com as equações de A_1 , A_2 , A_3 , x_1 , x_2 e x_3 , é possível calcular o centro de gravidade da área de concreto comprimida, substituindo-as na equação 3.

$$x_{cg} = \frac{\sum A_i x_i}{\sum A_i} \rightarrow x_{cg} = \frac{A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3}{A_1 + A_2 + A_3} \quad (20)$$

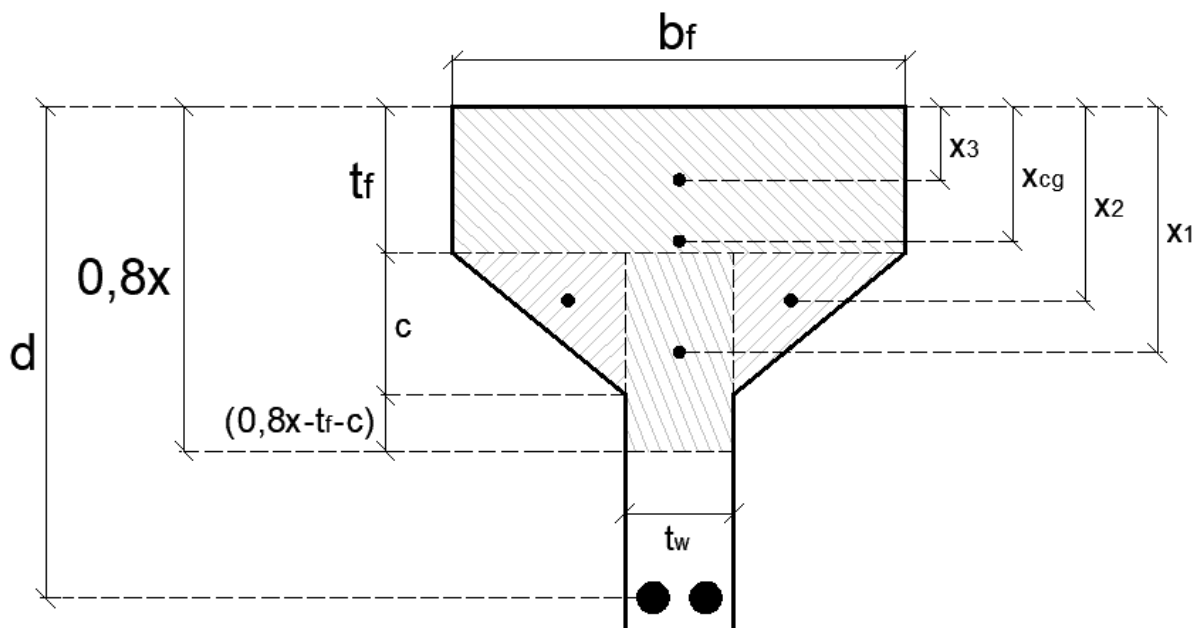
Fazendo o equilíbrio de momento, com uso da equação 4, temos a expressão abaixo.

$$\begin{aligned} M &= 0,85 \cdot f_{cd} \cdot (A_1 + A_2 + A_3) \cdot \left(d - \frac{A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3}{A_1 + A_2 + A_3} \right) \\ \frac{M}{0,85 \cdot f_{cd}} &= \{A_1 + A_2 + A_3\}d - [A_1 x_1] - [A_2 x_2] - [A_3 x_3] \\ \frac{M}{0,85 \cdot f_{cd}} &= \left\{ \frac{-0,64}{c} (b_f - t_w) x^2 + \left[\frac{1,6 t_f}{c} (b_f - t_w) + 0,8 b_f \right] x - \left[b_f + \frac{t_f}{c} (b_f - t_w) \right] t_f + \right. \\ &\quad \left. \frac{0,32}{c} (b_f - t_w) x^2 - \frac{0,8 t_f}{c} (b_f - t_w) x + \frac{0,5 t_f^2}{c} (b_f - t_w) + b_f \cdot t_f \right\} d - \\ &\quad \left[\left(\frac{-0,64}{c} (b_f - t_w) x^2 + \left[\frac{1,6 t_f}{c} (b_f - t_w) + 0,8 b_f \right] x - \left[b_f + \frac{t_f}{c} (b_f - t_w) \right] t_f \right) \cdot \left(\frac{0,8 x + t_f}{2} \right) \right] - \\ &\quad \left[\left(\frac{0,32}{c} (b_f - t_w) x^2 - \frac{0,8 t_f}{c} (b_f - t_w) x + \frac{0,5 t_f^2}{c} (b_f - t_w) \right) \cdot \left(\frac{0,8 x + 2 t_f}{3} \right) \right] - \left[(b_f \cdot t_f) \cdot \left(\frac{t_f}{2} \right) \right] \\ &\quad \left[\frac{0,512 (b_f - t_w)}{3c} \right] x^3 - \left[\frac{0,32 d (b_f - t_w)}{c} + \frac{0,32 t_f (b_f - t_w)}{c} + 0,32 b_f \right] x^2 + \\ &\quad \left[\frac{0,8 t_f d (b_f - t_w)}{c} + 0,8 d b_f \right] x - \left[\frac{0,5 t_f^2 d (b_f - t_w)}{c} - \frac{0,5 t_f^3 (b_f - t_w)}{3c} + \frac{M}{0,85 \cdot f_{cd}} \right] = 0 \quad (21) \end{aligned}$$

Com a equação 21, pode-se calcular a posição da linha neutra na região com mísula. Note que essa equação é do 3º grau, com isso, se encontra três raízes. Uma dessas raízes, normalmente a menor, é a posição da linha neutra, as outras duas não terão sentido físico, por isso, devem ser desconsideradas.

Seguindo o mesmo procedimento, encontra-se a posição da LN para a terceira hipótese. Aplicando a equação 3, podemos encontrar a distância do centro de gravidade da área sob compressão até a face mais comprimida da viga. As medidas de cada dimensão, para aplicação das equações pertinentes, estão dispostas da Figura 9.

Figura 9 – Centro de gravidade da área comprimida.



Fonte: própria

A fim de facilitar as manipulações algébricas, iniciou-se aqui a obtenção das distâncias x_1 , x_2 e x_3 e suas respectivas áreas geométricas. O valor de x_1 é a distância do centro de gravidade do retângulo com hachura na alma até a face superior da viga.

$$x_1 = t_f + \frac{0,8x - t_f}{2} \rightarrow x_1 = 0,4x + 0,5t_f \quad (22)$$

O valor de x_2 é a distância do centro de gravidade dos triângulos até a face superior da viga, conforme visto na Figura 9.

$$x_2 = t_f + \frac{c}{3} \quad (23)$$

O valor de x_3 é a distância do centro de gravidade do retângulo, referente à mesa, até a face superior da viga.

$$x_3 = \frac{t_f}{2} \quad (24)$$



Cálculo da área 1 (A_1) referente ao retângulo de x_1 .

$$A_1 = t_w \cdot (0,8x - t_f) \rightarrow A_1 = 0,8t_w x - t_w t_f \quad (25)$$

Cálculo da área 2 (A_2) referente aos dois triângulos de x_2 .

$$A_2 = c \cdot \left(\frac{b_f - t_w}{2} \right) \rightarrow A_2 = 0,5c b_f - 0,5c t_w \quad (26)$$

Cálculo da área 3 (A_3) referente ao retângulo de x_3 .

$$A_3 = b_f \cdot t_f \quad (27)$$

Cálculo do centro de gravidade da área de concreto comprimida à face superior da viga.

$$x_{cg} = \frac{\sum A_i x_i}{\sum A_i} \rightarrow x_{cg} = \frac{A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3}{A_1 + A_2 + A_3} \quad (28)$$

Com o equilíbrio de momento na seção transversal da viga, usando a equação 4, temos a expressão abaixo.

$$\begin{aligned} M &= 0,85 \cdot f_{cd} \cdot (A_1 + A_2 + A_3) \cdot \left(d - \frac{A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3}{A_1 + A_2 + A_3} \right) \\ \frac{M}{0,85 \cdot f_{cd}} &= \{A_1 + A_2 + A_3\}d - [A_1 x_1] - [A_2 x_2] - [A_3 x_3] \\ \frac{M}{0,85 \cdot f_{cd}} &= \{0,8t_w x - t_w t_f + 0,5c b_f - 0,5c t_w + b_f \cdot t_f\}d \\ &\quad - [(0,8t_w x - t_w t_f) \cdot (0,4x + 0,5t_f)] - [(0,5c b_f - 0,5c t_w) \cdot \left(t_f + \frac{c}{3} \right)] \\ &\quad - [(b_f \cdot t_f) \cdot (0,5t_f)] \\ \therefore [0,32t_w]x^2 - [0,8dt_w]x - [(0,5t_f - d - 0,5c)(t_w t_f - b_f t_f) + \\ &\quad + (0,5cd - \frac{0,5c^2}{3})(b_f - t_w) - \frac{M}{0,85 \cdot f_{cd}}] = 0 \quad (29) \end{aligned}$$

Resolvendo a equação 29, encontram-se suas duas raízes. A menor delas é a posição da linha neutra na viga. A maior raiz deve ser desconsiderada para esse problema.

$$[0,32t_w]x^2 - [0,8dt_w]x + C = 0$$

$$C = - \left[(0,5t_f - d - 0,5c)(t_w t_f - b_f t_f) + \left(0,5cd - \frac{0,5c^2}{3} \right) (b_f - t_w) - \frac{M}{0,85 \cdot f_{cd}} \right]$$

$$x = \frac{-(-0,8dt_w) - \sqrt{(0,8dt_w)^2 - 4(0,32t_w)C}}{2(0,32t_w)}$$

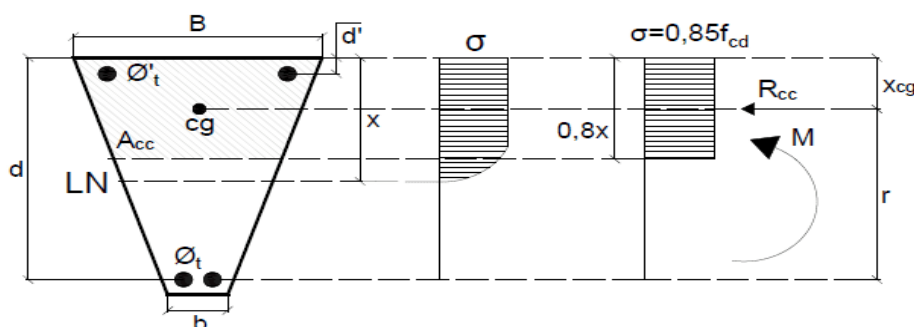
$$x = 1,25d \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2C}{d^2 t_w}} \right) \quad (30)$$

Para essa forma de viga, tipo T e I com mísula, a posição da linha neutra (LN) é obtida pelas equações 9, 21 e 30, respectivamente, para LN na mesa, LN na região com mísula e LN na alma. Da mesma forma que foi exposto no item 2.3, deve-se observar os limites estabelecidos pela NBR 6118 (ABNT, 2014).

2.5 LINHA NEUTRA EM VIGA TRAPEZOIDAL

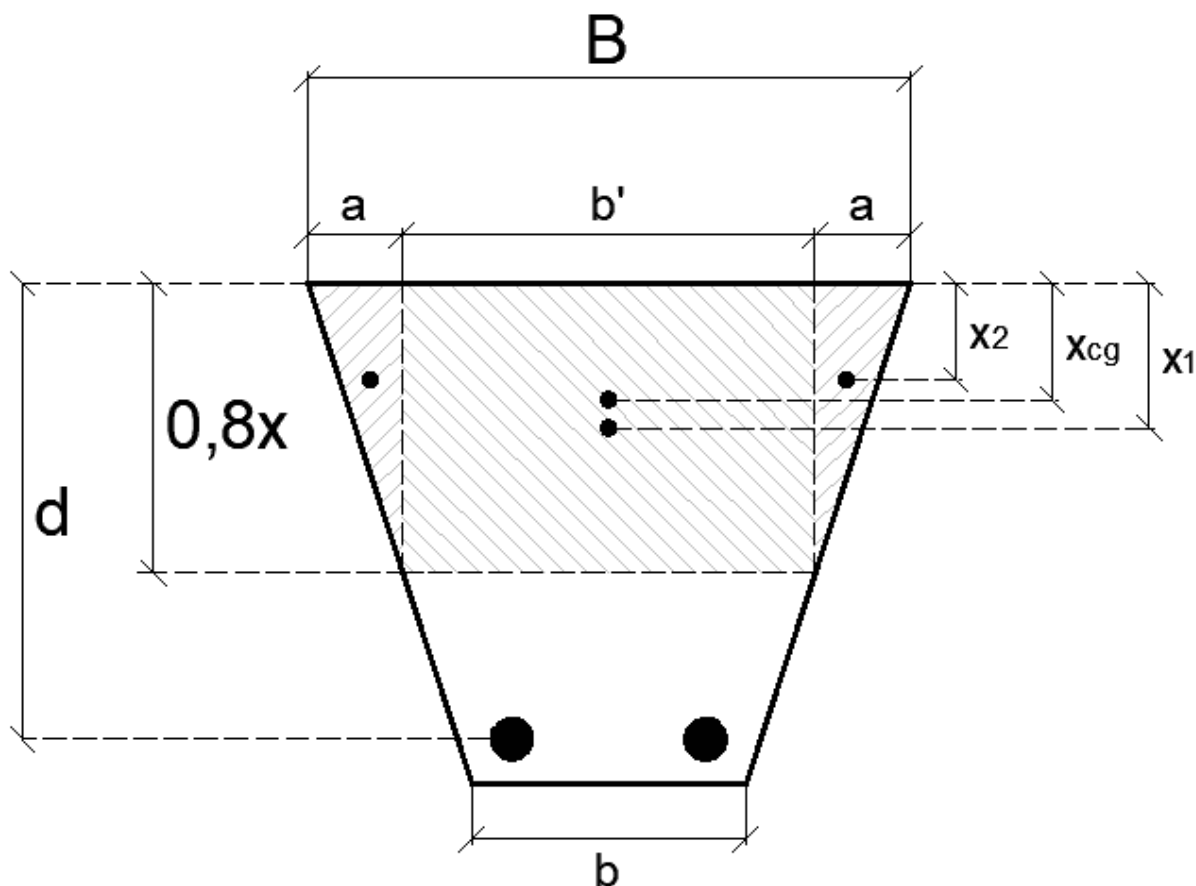
Esse é um tipo de viga pouco usado, mas há algumas aplicações de acordo com a necessidade do projeto. Como pôde ser observado ao longo deste estudo, a obtenção da posição da linha neutra é feita pelo equilíbrio de momento na seção transversal. O modelo apresentado aqui está conforme a Figura 10, ou seja, não é válido para base maior na parte inferior.

Figura 10 – Linha neutra em viga trapezoidal.



Fonte: própria

Figura 11 – Centro de gravidade da área comprimida.



Fonte: própria

Para esse tipo de viga, em que há regiões triangulares na seção transversal, a equação para determinar a linha neutra é semelhante à viga T e I com mísula. O cálculo é iniciado com as distâncias x_1 e x_2 com suas respectivas áreas geométricas.

O valor de x_1 é a distância do centro de gravidade do retângulo com hachura à face superior da viga, conforme indicado na Figura 11.

$$x_1 = \frac{0,8x}{2} \rightarrow x_1 = 0,4x \quad (31)$$

O valor de x_2 é a distância do centro de gravidade dos triângulos à face superior da viga, conforme indicado na Figura 11.



$$x_2 = \frac{0,8x}{3} \quad (32)$$

Cálculo da área 1 (A_1) referente ao retângulo de x_1 .

$$A_1 = 0,8x \cdot b'$$

Onde, por semelhança de triângulo e de forma aproximada, b' é igual a:

$$\begin{aligned} b' &= B - \frac{0,8x}{d}(B - b) \\ \therefore A_1 &= -\frac{0,64}{d}(B - b)x^2 + 0,8Bx \end{aligned} \quad (33)$$

Cálculo da área 2 (A_2) referente aos dois triângulos de x_2 .

$$A_2 = a \cdot 0,8x$$

Onde, por semelhança de triângulo e de forma aproximada, " a " é igual a:

$$\begin{aligned} a &= \frac{0,4}{d}(B - b)x \\ \therefore A_2 &= \frac{0,32}{d}(B - b)x^2 \end{aligned} \quad (34)$$

Com as equações das áreas e as distâncias x_i acima calculadas, aplicando a equação 3, tem-se o centro de gravidade da área de concreto comprimida.

$$x_{cg} = \frac{\sum A_i x_i}{\sum A_i} \rightarrow x_{cg} = \frac{A_1 x_1 + A_2 x_2}{A_1 + A_2} \quad (35)$$

Do mesmo modo das vigas anteriores, fazendo o equilíbrio de momento com a equação 4, temos a seguinte expressão.



$$M = 0,85 \cdot f_{cd} \cdot (A_1 + A_2) \cdot \left(d - \frac{A_1 x_1 + A_2 x_2}{A_1 + A_2} \right)$$

$$\frac{M}{0,85 \cdot f_{cd}} = \{A_1 + A_2\}d - [A_1 x_1] - [A_2 x_2]$$

$$\begin{aligned} \frac{M}{0,85 \cdot f_{cd}} = & \left\{ -\frac{0,64}{d} (B - b)x^2 + 0,8Bx + \frac{0,32}{d} (B - b)x^2 \right\} d - \\ & \left[\left(-\frac{0,64}{d} (B - b)x^2 + 0,8Bx \right) \cdot (0,4x) \right] - \\ & \left[\left(\frac{0,32}{d} (B - b)x^2 \right) \cdot \left(\frac{0,8x}{3} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\therefore \left[\frac{0,512}{3d} (B - b) \right] x^3 - [0,64B - 0,32b]x^2 + [0,8dB]x - \frac{M}{0,85 \cdot f_{cd}} = 0 \quad (36)$$

Observe que a equação 36 é do 3º grau, com isso, ao resolvê-la, encontra-se três raízes. Normalmente, a menor raiz é a solução do problema. Esse tipo de equação não possui uma fórmula para resolvê-la, então, a melhor maneira é usar algum software. Há métodos iterativos para solucionar polinômio com grau maior que dois. Um desses métodos é o de Gauss-Seidel apresentado por Boldrini *et al* (1980).

3. CONCLUSÃO

Mediante as análises feitas, ficou esclarecida a forma como é calculada a posição da linha neutra em vigas submetidas à flexão. Para outros tipos de seções transversais em vigas não abordadas aqui, pode-se seguir o mesmo modelo de cálculo demonstrado ao longo desse estudo. Ficou notório que quando a seção transversal é composta de figuras retangulares, chega-se a uma equação do 2º grau, já as que possuem alguma parte triangular, o problema é resolvido com equações do 3º grau. Para essas equações do 3º grau, é necessário adotar algum método matemático para encontrar as raízes, por exemplo, métodos iterativos, pois não há fórmulas para resolvê-las.



REFERÊNCIAS

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118**: projeto de estruturas de concreto: procedimento. Rio de Janeiro, 2014.

BOLDRINI, J. L. *et al.* **Álgebra Linear**. 3. ed. São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1980.

CARVALHO, R. C.; FILHO, J. R. F. **Cálculo e Detalhamento de Estruturas Usuais de Concreto Armado**. 3. ed. São Carlos: EdUFSCar, 2007.

Enviado: Agosto, 2019.

Aprovado: Outubro, 2019.